Segundo Congreso Internacional

IBEROCABRI 2004

Memorias

EDITORES

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Ana Isabel Sacristán Rock
Gonzalo Zubieta Badillo

Celebrado en Saltillo, Coahuila. Junio de 2004

Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila

Cinvestav

Página web: www.matedu.cinvestav.mx/congresos/iberocabri.html
El contenido de los artículos es responsabilidad de los autores.

ISBN: **Registro en trámite.**

DIAZ BARRIGA, SANDOVAL, SACRISTAN y ZUBIETA (Eds). Memorias del Segundo Congreso Iberocabri 2004. México, Cinvestav.

Con el apoyo de

Texas Instruments de México

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila

Sociedad Matemática Mexicana

COMITÉ CIENTÍFICO

Jean – Marie Laborde
Université Joseph Fourier, Francia
Colette Laborde
Université Joseph Fourier, Francia
François Pluvinage
IREM – Strassburg, Francia; Cinvestav, México
Ricardo Barroso Campos
Universidad de Sevilla, España
Eugenio Díaz Barriga Arceo
Universidad Autónoma de Coahuila, México
Luis Moreno Armella
Cinvestav, México
Federica Olivero
University of Bristol, UK

COMITÉ ORGANIZADOR

Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Olimpia Figueras Mourut de M.
Ana Isabel Sacristán Rock
Gonzalo Zubieta Badillo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Humberto Madrid de la Vega
David Benítez Mojica
Francisco Javier Cepeda Flores
Irma Delia García Calvillo

Segundo Congreso Internacional

IBEROCABRI *2004*

2 - 4 de Junio

Saltillo, Coahuila, México

MEMORIAS

Introducción a las memorias electrónicas

El disco compacto consta de una carpeta con archivos de video de las conferencias y de un archivo .pdf el cual contiene todos los documentos y las respectivas ligas a los mismos.

Todos los documentos, entregados por los autores, están organizados de la siguiente manera: Conferencias (Plenarias y Videoconferencias), Minicursos, Talleres, Reportes (de investigación, de divulgación y avances de tesis).

Todos los archivos requieren Adobe Acrobat Reader versión 5.0 o mayores para abrirlos.

Nota aclaratoria: Los contenidos de los artículos son responsabilidad estricta de cada uno de los autores. En la medida de lo posible, hemos respetado los formatos que ellos utilizaron para sus trabajos.

Atentamente,

LOS EDITORES
Eugenio Díaz Barriga Arceo
Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Ana Isabel Sacristán Rock
Gonzalo Zubieta Badillo

Dirección para bajar las conferencias plenarias de IberoCabri 2004
(Observación: Se requiere tener instalado Real Player de Windows).
www.infosal.uadec.mx/vc/

O bien directamente haciendo clic sobre los siguientes hipervínculos:

JEAN MARIE LABORDE, "NUEVAS PERPECTIVAS PARA EL CALCULO DEL MAÑANA", EN SALTLLO, 2 DE JUNIO DEL 2004 (primero 40 minutos sin audio)

LUIS MORENO ARMELLA, "MATEMATICA DINAMICA Y SUS PROCESOS DE VALIDACION", EN SALTILLO, 2 DE JUNIO DEL 2004

LUIS MORENO ARMELLA,"MATEMATICA DINAMICA Y SUS PROCESOS DE VALIDACION", EN SALTILLO, 2 DE JUNIO DEL 2004 SEGUNDA PARTE.

RICARDO BARROSO, "UTILIZACION Y APLICACION DE PROPIEDADES GEOMETRICAS EN ENTORNOS DE PROBLEMAS", DESDE ESPAÑA, 3 DE JUNIO DEL 2004

FEDERICA OLIVERO, "LA DEMOSTRACION COMO PROCESO DE CONVERGENCIA EL PAPEL DE HERRAMIENTAS E INTERACCIONES EN UN HABIENTE DE LA GEOMETRIA DINAMICA", DESDE SALTILLO, 3 DE JUNIO DEL 2004

F. PLUVINAGE, "GEOMETRIA DINAMICA EN EL ESPACIO", DESDE FRANCIA, 4 DE JUNIO DEL 2004

EUGENIO DIAZ BARRIGA ARCEO, "PERSPECTIVAS DE LA INVESTIGACION CON GEOMETRIA DINAMICA EN MEXICO", DESDE SALTILLO, 4 DE JUNIO DEL 2004

COLETTE LABORDE, "CABRI USADO COMO UNA HERRAMIENTA DE MODELACION DEL CONOCIMIENTO EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS", DESDE SALTILLO, 4 DE JUNIO DEL 2004

Conferencias Plenarias

Cabri usado como una herramienta de mediación del conocimiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Colette Laborde
University Joseph Fourier and Institute of Teacher Education, Grenoble, France
Plenary lecture at Iberocabri 2004

The use of technology is nowadays often strongly recommended by institutions and curricula. But on the one hand it turns out that a large part of mathematics teachers remains reluctant of integrating technology into their teaching (Guin & Trouche 1999). On the other hand several investigations of students using technology that have been carried out over the past ten years show that students do not learn from simply interacting with technology. The design of adequate tasks, the role of the teacher plays a critical role in the success of integrating technology (Lagrange et al. 2001).

In this talk, we attempt to argue that it is possible

- to make use of technology for organizing good conditions fostering learning
- but that this organization must be based on several analyses, a mathematical analysis of the notions to taught, a cognitive analysis of the possible difficulties of students in learning mathematics but also in using technology.

1. The nature of mathematical objects and the crucial role of representations

As so often stated since the time of ancient Greece, the nature of mathematical objects is by essence abstract. Mathematical objects are only indirectly accessible through representations (D'Amore 2003 pp.39-43, Duval 2000) and this contributes to the paradoxical character of mathematical knowledge: "The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations" (Duval, *ibid*., p.60). Other researchers have stressed the importance of these semiotic systems under various names. Duval calls them registers. Bosch and Chevallard (1999) introduce the distinction between ostensive objects and non ostensive and argue that mathematicians have always considered their work as dealing with non-ostensive objects and that the treatment of ostensive objects (expressions, diagrams, formulas, graphical representations) plays just an auxiliary role for them. Moreno Armella (1999) claims that every cognitive activity is an action mediated by material or symbolic tools. Kaput and Schorr (2002, pp.28-29) claim that the development of algebra in the history of mathematics was made possible by an entirely new mode of thought "characterized by the use of an operant symbolism, that is, a symbolism that not only abbreviates words but represents the workings of the combinatory operations, or, in other words, a symbolism with which one operates."

The activity of solving mathematical problems, which is the essence of mathematics, is based on both an interplay between various registers and treatments within each register. Each register has its own treatment possibilities and favors specific aspects of the mathematical activity. Besides registers, individuals may have recourse to tools for performing a mathematical activity and namely over the past years the recourse to technology has become very important in various domains of mathematics. Tools allow operating on mathematical objects in specific registers, a tool making use of one or several registers. For example, Derive has mainly recourse to symbolic expressions but also to graphical representations in coordinate geometry. Dynamic geometry software as Geometer Sketchpad or Cabri-geometry are intended to draw variable geometrical diagrams on the screen of the computer but for example Cabri is also providing menus and feedback messages in natural language as well as dynamic markers such as blinking lines or points.

It is important to stress that the semiotic registers of these technological environments may deeply differ from what they are in a paper and pencil environment. It is especially the case with dynamic geometry software that offers diagrams of a very specific nature: variable diagrams that can be continuously modified while keeping their geometrical properties when dragged. The direct manipulation of diagrams has a visible spatial effect but has also a mathematical counterpart. The operations performed within the register of dynamic diagrams (that Duval calls treatment) have thus a specific nature and this leads to two assumptions that are currently shared by various research works and supported by empirical research. They will be presented in the next section.

2. Mathematical knowledge and instrumental knowledge

Two main hypotheses underlie our analysis of the role of technology in the learning and teaching processes.

First hypothesis: We assume that a tool is not transparent and that using a tool for doing mathematics not only changes the way to do mathematics but also requires a specific appropriation of the tool. In the last decade, some psychologists (Vérillon & Rabardel, 1995) have shown through empirical research, how the tool (also called artefact) itself gives rise to a mental construction by the learner using the tool to solve problems. The *instrument,* according to the terms of Vérillon and Rabardel, denotes this psychological construct of the user: "The instrument does not exist in itself, it becomes an instrument when the subject has been able to appropriate it for himself and has integrated it with his activity." The subject develops procedures and rules of actions when using the artefact and so constructs *instrumentation schemes* and simultaneously a representation of the properties of the tool. A scheme must be understood as an invariant organisation of actions in a given class of situations. The notion of instrumentation scheme refers to an invariant organisation of actions involving the use of an artefact for solving a type of tasks.

Second hypothesis: tools like those offered by information technology embed mathematical knowledge (as for example already visible in Cabri from the denominations of menu items — perpendicular bisector, parallel line…—) and the use of such tools requires the integration of both mathematical knowledge and knowledge about the tool.

An example of instrumentation schemes

Let us illustrate this claim with the example of the construction of a parallelogram in Cabri. Students are given two segments AB and AD and they are asked to construct the parallelogram ABCD. In a compass and ruler construction in paper and pencil environment, students would use a strategy based on the congruence of opposite sides. But in Cabri, almost all students use the strategy of constructing parallel lines to the given segments in order to obtain the fourth vertex C. It illustrates very clearly how much the preferred strategy is linked to the domain of efficiency of the tool. Constructing parallel lines in paper and pencil would be more tedious since the ruler and compass construction of a parallel line to a line is based on the construction of a parallelogram. In Cabri, the tool parallel line is available and students have a spontaneous recourse to it since the typical feature of a parallelogram for students is the parallelism of the sides. After parallel lines and point C are constructed (Fig.1), then the two additional sides (or the polygon) have to be constructed and parallel lines must be hidden (Fig.2). In this sequence of actions, called by Verillon and Rabardel (1995) *scheme of instrumented action*, are intertwined both mathematical knowledge and knowledge of how to use the tool for fulfilling the task to produce the dynamic diagram of a parallelogram. The use of the tool affects not only the choice of the construction strategy but also the actions to be done. In Cabri, segments have to be constructed since a segment cannot be obtained as a part of a line (Fig.3).

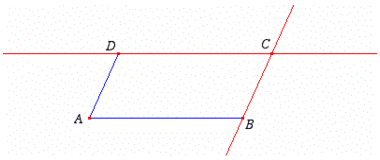


Fig.1

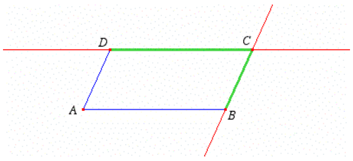


Fig.2

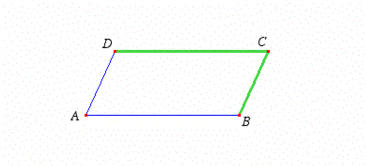


Fig.3

The mathematical knowledge of the user is thus another critical factor affecting the type of strategy that is used. Students are often successful in constructing a parallelogram in Cabri by obtaining the fourth vertex as the intersecting point of lines parallel to the given segments. But the teacher may expect another strategy, the use of a central symmetry around the midpoint of segment BD. This latter strategy is valid even when the parallelogram is “flat” whilst the former one would not provide a flat parallelogram. The central symmetry strategy is shorter than the parallel line strategy since the parallel lines have not to be hidden in order to make visible the only parallelogram. The scheme of instrumented action in Cabri attached to this strategy differs from the preceding one and clearly depends on mathematical knowledge. It involves the invariance of a parallelogram under central symmetry, a geometrical property which is not operational in a paper and pencil environment for constructing a figure. It is generally not proposed by students and must be introduced by the teacher. An instrumented task can thus be the source of reinforcing or introducing knowledge. This is an important issue related to the integration of technology into teaching.

As described above, a scheme of instrumented action involves actions directly linked to a specific use of the artefact. For example, in Cabri, in order to construct a parallel line to a segment, the user has to perform a sequence of elementary actions, selecting a menu, pulling down it, selecting the tool in the menu, showing a point and a line. Each of these actions requires the move of the cursor by using the mouse and clicking. The user has also to construct an invariant organisation attached to the sequence of these elementary actions. Such an organisation is called *scheme of usage* by Rabardel. A scheme of instrumented action involves several schemes of usage. The design of interface certainly affects the construction of schemes of usage. However mathematical knowledge is also involved in a scheme of usage. Below are presented two schemes of usage in Cabri requiring a functional view of a geometrical object, i.e. a conception of geometrical objects as a function of other objects.

At middle school or even high school, students do not have such a conception and therefore may encounter difficulties in using tools of DGE[1]. Constructing parallel lines in DGE requires for example designating with the mouse two elements of which a parallel line is function of, the direction (i.e. a line) and a point through which the parallel line is passing. Very often the students working with Cabri we could observe at middle school or even high school showed the direction and were waiting for the parallel line to be drawn and did not understand why the computer did nothing. After a while they clicked anywhere in the screen and more than often they clicked on the line giving the direction. The obtained parallel line was thus coinciding with the line and could not be seen unless the cursor came close to the line and an ambiguity message was displayed "What object?". Understanding this message requires being familiar with the ambiguity notion in Cabri, i.e. a sophisticated knowledge of the tool. Very often students do not understand the situation they have created and a solution can be found only with the help of the teacher.

Another example can be given with the construction scheme of the midpoint of a segment. Very often the beginners show the position of the midpoint to ask the computer to construct the segment whereas they could show any place on the segment since the midpoint is defined as a function of the segment in a DGE and not as a spatial object.

The interface can make students aware of the necessity of showing the variable elements the object to be constructed is function of. Taking into account this difficulty of students, the designers of Cabri-junior (on the TI 83 Plus or Silver and TI 84) decided to display under the form of a dotted object the temporary spatial position of the geometrical object to be constructed. This temporary position is determined by the first variable element already shown by the user and the current position of the cursor. When the user clicks the final variable element defining the object to be constructed, this latter object is displayed in the usual way (Fig.4). This new interface continuously informs the user and avoids the reaction of students saying that machine is not working.

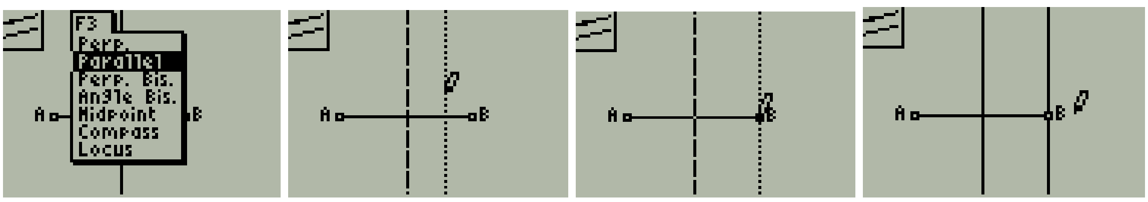


Fig.4 – The interface of the construction of a parallel line to a line in Cabri Junior

Briefly speaking, solving mathematical tasks in a technological environment requires two kinds of knowledge, mathematical and instrumental. Most of time, especially because ICT used in the teaching of mathematics embeds mathematics, both types of knowledge interact in the use of technology.

At the beginning of the use of dynamic geometry, research has been devoted to investigate how students solved tasks using dynamic geometry. Even if the instrumental dimension was not taken into account, these investigations showed how the solving processes were intertwined with the features of the environment that were not necessarily mastered by the students.

[1] In the paper DGE denotes Dynamic Geometry Environments

The drag mode was one of the very specific features that has been investigated. Hölzl (1996) identified the "drag and link approach" in students' construction processes of Cabri diagrams. Students relax one condition to do the construction and then drag to satisfy the last condition. They obtain a diagram visually correct and want to secure the diagram by using the redefinition facility of Cabri. But often it does not work because of hidden dependencies that are not considered by students. As said above, they often are not aware of functional dependencies between objects. Although Hölzl does not refer to instrumentation, this "drag and link approach" would be called an instrumentation scheme in terms of Vérillon and Rabardel. The students constructed an instrumentation scheme not compatible with the functioning of Cabri. Arzarello, Micheletti, Olivero, Robutti, Paola, and Gallino (1998 a & b) identified different kinds of dragging modalities that were not all referring to an organized experimentation: "wandering dragging," "lieu muet" dragging, and dragging to test hypotheses. Wandering is just moving without a predefined aim for searching for regularities whilst Lieu muet dragging refers to dragging in such a way that some regularity in the drawing is preserved. The dragging to test hypotheses obviously presupposes that regularities have already been detected which are not systematically tested. Goldenberg (1995) notes that often students do not know how to conduct experiments and are unsure what to vary and what to keep fixed. Thus a student's purposeful move from wandering dragging to lieu muet dragging represents a cognitive shift.

From these investigations, it appears that the power of the drag mode in exploration was not spontaneously mastered by students. It may also happen that the variability introduced by drag mode made the task more complex. Students learned from the complexity brought by the computer environment that offered to them another window on mathematics (Noss & Hoyles *ibid*.). This point of view was supported by several researchers (CAS used as a lever to promote work on the syntax of algebraic expressions Artigue, 2002, p.265, Lagrange 2002, p.171, or DGE as assisting pupils to explain the properties of a rhombus and to distinguish them from those of a square, Hoyles & Jones 1998). The purpose of the following section is to present some examples of situations making a deliberate use of the interaction between instrumental and mathematical knowledge. They are based on the vygotskian idea of semiotic mediation and of internalization process.

3. The medium role of technology for teaching mathematics

The idea of internalization process is not new and was present in the Vygostkian theory of semiotic mediation and of tool. Vygostky considered that signs and tools belong to the same category of mediators of human activity and as such are fundamental elements in the process of constructing concepts. He coined the difference between technical tools and psychological tools (that he also called signs) by considering their respective functions. The function of a technical tool is externally oriented and helps acting on the outside environment to change it whereas the function of a sign is internally oriented and contributes to change the mental constructions of the individual. Vygostky described the internalization process as a process transforming a technical tool into a psychological tool.

This Vygostkian approach has been adopted by Bartolini Bussi and Mariotti (1999) for artefacts or computer environments (as described in Mariotti 2002). In the case of CAS and DGE incorporating mathematical knowledge, it seems possible that teaching contributes to the internalization process from the external tools offered by the environment to the construction of the meaning of the mathematical concept. This has been done by Mariotti (*ibid*.,p.713) about the notion of geometric construction by using the external tools, drag mode and history command of Cabri. As told by Mariotti, "the temporal sequence of the constructions' steps represents the counterpart of the logic hierarchy between the geometric properties of a figure." "The availability of an external tool referring to the procedure of the construction in its temporal sequence very often contributed to the production of a description and a correct justification of a construction.". But as argued by Lagrange (2002, chapter 3) about the use of CAS, the design of the tasks proposed to students is critical in order to foster a conceptualization process. The task must introduce a problem that can be appropriated by the students and be experienced by them as a real problem that they attempt to solve by involving knowledge and not for meeting the expectations of the teacher —corresponding to what Brousseau (1997) calls adidactical situation—.

At university level, the notion of differential equation linked to the derivative viewed as a function of two variables

The drag mode was used by Moreno Gordillo (T14 IberoCabri, 2003) and Arslan (2003) as a counterpart of the functional link between the derivative and the variables x and y in a differential equation of first order. A first order differential equation involves two kinds of functions, the function y' with variables x and y, and the functions solutions of the equation. Students usually know how to cope with differential equations, only when they are able to solve them in the algebraic setting through a taught algorithm. Therefore they only consider the second kind of functions when there is an explicit expression and are not aware of y' being a function of x and y. Dynamic geometry allows to construct and represent a variable tangent vector to a solution of the equation and from the observation of the variation of a tangent vector to state some properties about the variation of the solutions. This requires an algebraic interpretation of the graphical behavior of the tangent vector; such an interpretation is not spontaneous for the students. The task designed by Moreno and Arslan consisted of giving a variable tangent vector on the screen of Cabri and of asking the students to select the appropriate differential equation from a given list of 7 equations. Students had to produce themselves the relevant variations of the variable vector to infer some algebraic properties satisfied (or not satisfied) by the differential equation. The equations of list were depending of an unknown positive parameter avoiding any numerical strategy: calculation of the slope at a point or constructing the graphical representation of an approximate solution. The favorite strategy of the students was to use the tool Trace and by dragging the variable vector to guess the family of solutions from the apparent shape of the curve and then to match it with the corresponding equation. But not all equations were "solvable" and students had to move to other strategies based on the study of the graphical behavior of the tangent vector: sign of the slope, invariance of the vector along a horizontal or vertical direction implying that y or x were absent from the equation. Students had to construct the scheme of instrumented action of finding whether y' was a function of x or y by dragging the vector along a direction parallel to the axes. Obviously this scheme is linked with a conception of y' as function of x and y.

At secondary school level, a pointwise conception of figure and geometrical transformation

An example related to the learning of a pointwise approach of geometrical transformation will be given below as an illustration. Two points of view are useful in the use of geometrical transformations: a global point of view and a pointwise point of view. The former allows the use of conservation properties about figures: a reflection transforms a straight line into a line, a circle into a circle, two parallel lines into two parallel lines. The latter allows to determine or to construct the image of figures that cannot be reduced to simple figures the image of which is known. It is also useful when no global property is available about the transformation. In both cases, a fundamental property is used: a figure is a set of points. This conception of figures is far from natural for students beginning high school. The problem is that it is not operationally practical in paper and pencil environment. But it is possible in Cabri to define a transformation with a pointwise approach: the transformation is a macroconstruction which provides a point when the initial object is a point. Obtaining the image of a figure is done by using the tool Locus on the image of a variable point of the initial figure. The creation of a variable point on the initial figure and the use of Locus are the external counterpart in Cabri of the following definition based on a pointwise approach of the figure and of the transformation: the image of a figure is characterized as the set of points images of the points of the initial figure. Jahn (2000) made use of this possible mediation in Cabri of a pointwise approach in a teaching sequence in a grade 10 class. An unknown transformation X was given as a black box (a macro construction providing the image of any point). It was actually an oblique symmetry. Students had to determine how to construct the image of a point by exploring the effect of the macro-construction. All succeeded. Then they had to find the image of a circle under transformation X. As this latter did not preserve length, the only way to construct the image was to obtain it as a locus of a variable point of the circle (Fig.7). Cabri could offer visual feedback showing that a circle could not be the image of the initial circle. A point on the initial circle did not have its image on the supposed image circle. The task offered good conditions for the construction of a solution by the students.

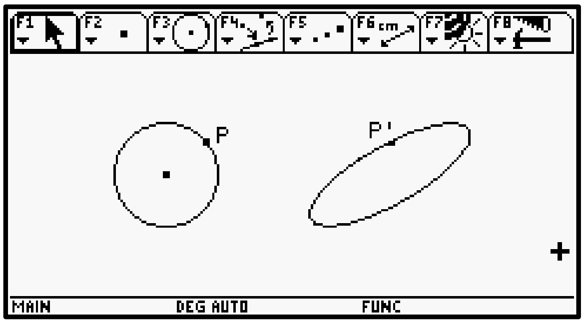


Fig.7 – Locus of the image P' of a variable point P moving on a circle

In this sequence, it was intended to mediate the pointwise approach to geometrical transformation through the tools macro-construction and Locus. However, although the tool Locus was already introduced in the teaching sequence, its scheme of usage was not yet constructed by the students. "They had great difficulties in understanding the order in which the inputs should be selected to successfully apply the Locus tool" (Jahn, *ibid*., p.I-101). But on their own they had recourse to the tool Trace and produced the trajectory of the image of a variable point of the circle. Then the teacher intervened to favor the move to a mathematical interpretation of their actions in Cabri under the form of the pointwise characterization of the image mentioned above. He reinforced the use of tool Locus with the arguments that a trace cannot be saved whilst a locus can or that a trace cannot move when the initial circle moves. The scheme of usage of Locus required the construction of a mathematical meaning of the pointwise view of the notion of image. *A contrario* this meaning was constructed by means of the mediation of image by the combination of the drag mode and the tool Trace (another scheme of usage).Then when other transformations were presented to students of this class, even outside the Cabri environment, from themselves they claimed that it was necessary to check whether the transformation preserves collinearity or not. This was a sign of the internalization process of another point of view than the global one, and very likely of a pointwise approach (as stated in further activities). This example highlights the embedding of mathematical and instrumental knowledge. It also shows the importance of the role of the teacher.

The interventions of the teacher are essential for making possible the construction of a correspondence between mathematical knowledge and knowledge constructed from the interactions with the computer environment. Because as pointed out by the instrumentation theory, the meaning constructed by the student when using the artefact, may differ from what is intended by the teacher, the interventions of the teacher are critical to let the meanings evolve towards culturally shared meanings of mathematical knowledge. This may be done by using collective discussions in classrooms as proposed by our Italian colleagues (Bartolini Bussi & Mariotti, *ibid*.).

Below are reported two teaching experiments based on a semiotic mediation process.

The first one deals with the notion of operative status of a statement in a deductive step (hypothesis or conclusion). The second one deals with the notions of independent and dependent variables as well as the notion of graph of a function.

In both experiments, the design of tasks in the technology based environment fulfills a double role,

- contributing to the construction of a priori expected instrumentation schemes being the counterpart of mathematical objects and operations

- proposing problem situations for which a specific aspect of the notion to be taught which is object of teaching is a solution means (adidactical situation in terms of the theory of didactical situations, Brousseau 1997).

Mediation of the operative status of a statement in a proof in Cabri Junior

Duval (1991) analyzes a deductive step in a proof as made of three parts

- the premises or hypotheses

- the rule of inference (theorem or definition taken from a corpus accepted by the community in -and for- which the proof is done)

- the conclusion.

He also pointed out on the function (called by Duval *operative status*) of a statement in a proof. A statement in a step may have the function of hypothesis or of conclusion but in both cases the epistemic value of the statement is true. This is why it is so difficult for students to assume for a while that only the premises are true whilst the conclusion cannot be considered as true. It is difficult for students to accept that what is important in a proof is not the truth of a statement but its operative status (given in the data, proved and thus being part of potential premises, not yet proved).

As a consequence students often do not see a difference between a theorem and its converse, both referring to the same objects and the same relations. They do not understand the function of hypothesis and of conclusion in the statement of the theorem and therefore are not able to distinguish between hypothesis and conclusion as often noticed by teachers.

The drag mode of dynamic geometry can be used to introduce two critical aspects for understanding the distinction between hypothesis and conclusion:

- a dissymmetry in action that allows to make the distinction between hypothesis and conclusion

- the variation that transforms the static truth into a dynamic phenomenon in which the consequence of the action becomes true when conditions are satisfied.

Example in Cabri-Junior (Fig.8)

Construct any quadrilateral ABCD (more general hypothesis), its diagonals and the midpoint of each diagonal. Drag any vertex A, B, C or D so that the midpoints are coinciding (variation of one element in order to obtain an additional condition). The focus of the control is on the superimposition of the midpoints.

The visible effect is the change of shape. The obtained shape is a parallelogram.

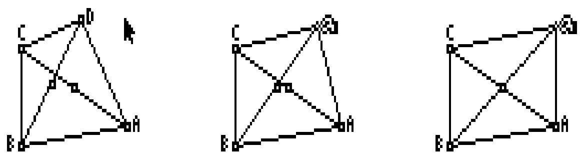


Fig.8 – Dragging vertex D in a quadrilateral until making midpoints of the diagonals coinciding

Changing the condition on an object by dragging it (here the diagonals), implies a visible change on other objects (here the parallelogram). The condition is what the student is directly changing. The visible effect is the result of the implication. The condition plays the role of the hypothesis. The effect plays the role of the conclusion. The link between condition and effect introduces a causal effect oriented from the hypothesis to the conclusion.

A teaching experiment was recently conducted with 8^{th} graders (13-14 years) in France (Coutat 2003). An initial test was given to all students of the class in order to select a sample of 10 students who do not distinguish a theorem and its converse. The ten students were then faced with tasks to be done in Cabri Junior. They worked in pairs. Then final tests were given to the whole class about the same topic.

In the initial written test, students had to group the statements referring to the same theorem in proposed statements in two cases: the midpoint segment theorem and the right angle inscribed in a circle. As an example, let us present the first question about the midpoint segment theorem.

> “ Draw a triangle ABC and M the midpoint of side [AB]. Draw a line passing through M and parallel to side [BC]. What do you notice?
>
> Among the following properties, indicate those which seem to correspond to the displayed property. Justify your choice.
>
> - In a triangle if one draws the parallel line to a side passing through the midpoint of another side, then this line is passing through the midpoint of the third side.
>
> - In a triangle a parallel line to the third side is passing through the midpoints of the two other sides.

- In a triangle, the line passing through the midpoint of a side and parallel to a second side intersects the third side into its midpoint

- In a triangle, if a line is passing through the midpoints of two sides, it is parallel to the third one.”

About one third of the students thought that all statements were the same or that statements 1, 3 and 4 were the same. Very often no justification was given or students wrote that all statements were true.

Then the selected students worked in pairs under the guidance of an experimenter in an one and half hour session. They were given two kinds of tasks: formulating a theorem from manipulations in Cabri Junior and associating manipulations in Cabri Junior to the statement of a theorem.

Tasks 1

“Create a triangle ABC then construct the perpendicular bisector of [BC]. Then construct the altitude of triangle ABC passing through A.

What manipulation do you have to do to make the perpendicular bisector coinciding with the altitude? What is the consequence of this manipulation on triangle ABC?

Formulate in terms of if…then the corresponding property.”

“Create a triangle ABC, draw two perpendicular bisectors of this triangle then the circumscribed circle of the triangle. What manipulation do you do in order to make the centre of the circle coming onto a side of the triangle?

What becomes the triangle?

Formulate a theorem under the form *If... then* that you can associate to the manipulation that you have done.”

Tasks 2

“If a parallelogram has a right angle, then it is a rectangle”

What manipulations can be associated in Cabri Junior to this statement in order to make apparent the distinction between hypothesis and conclusion ?

“A quadrilateral with two opposite sides parallel and equal is a parallelogram.”

Same question

After each task the experimenter intervened to point out the link between hypothesis and actions and the link between conclusion and the consequence of the actions and proposed the converse theorem in which students were asked to find hypotheses and conclusions by evoking the action on Cabri.

The drag mode is the key element in the mediation process offered by Cabri Junior. It allows to start with a diagram not satisfying the conditions (this is quite impossible in paper and pencil environment) and to act on the diagram to make it satisfying one (or several) condition(s). The dynamic change of the diagram makes visible the effect of the condition. In tasks 1, students must produce formulations at two levels:

- at the level of actions and manipulations
- at the theoretical level in mathematical terms.

These tasks are intended to facilitate the correspondence between the actions in Cabri Junior and mathematics. In tasks 2 students must analyze the statement of a theorem in terms of hypothesis and conclusion and Cabri offers a visualization of their analysis.

All five pairs did not encounter problems in the manipulations with Cabri-Junior in finding what they had to move in order to obtain the conclusion. Formulating a theorem was not so easy for some of them who needed the help of the experimenter. Generally the formulations of theorems kept some elements coming from the manipulation such as "If one moves … then…" or "In a triangle if the altitude and the perpendicular bisector are superimposed, then one obtains an isosceles triangle" or "If… then the triangle becomes isosceles" "If… then the triangle will be isosceles". The dissymmetry introduced by the manipulations in Cabri-Junior is reflected in those formulations. The working session on Cabri Junior was short (1,5h) and it is clear that the internalization process takes much more time and a longer sequence of tasks. The students seemed to be able to produce a hybrid formulation of a theorem combining mathematical terms and some elements attached to the manipulations. It is important also to know whether they were able to distinguish hypothesis and conclusion outside the Cabri environment. After the session each pair was given by the experimenter a theorem and its converse and asked to say whether they were identical or not. Almost all students found them identical but as soon as the experimenter evoked Cabri, students were able to simulate in thought what they could do in Cabri and gave a correct answer.

In the final tests (given 3 weeks after the session), that turned out to be difficult for all students of the class, the group of the Cabri students differed from their classmates in that seven of them were able to find the hypotheses and the conclusion in a theorem. In a test about finding theorems identical to a given theorem in a list of statements the students of the Cabri group had definitely better results than the others (as presented below Fig.9), although they were the students who initially encountered the greatest difficulties.

Written Test

For each of the proposed formulations, select the formulations which seem to be equivalent to the given theorem, i.e. which have the same hypotheses and conclusion.

1 – If a quadrilateral has its diagonals intersecting into their midpoint then it is a parallelogram.

- A parallelogram has its diagonals intersecting into their midpoint

- A quadrilateral that has its diagonals intersecting into their midpoint is a parallelogram.

2 - In a triangle, if the altitude is coinciding with the perpendicular bisector, then the triangle is isosceles.

- A triangle that has a perpendicular bisector coinciding with its altitude is an isosceles triangle.

- An isosceles triangle has its altitude and its perpendicular bisector are coinciding

- A triangle is isosceles if an altitude and the corresponding perpendicular bisector are coinciding

3 – In a triangle, if a line is parallel to a side and intersects a second side into its midpoint, then it intersects the third side into its midpoint

- In a triangle, a line intersecting two sides into their midpoints is parallel to the third one.

- In a triangle, a line intersecting a side into its midpoint and parallel to another side intersects the last side into its midpoint.

- In a triangle, a line that is parallel to a side et and that intersects a second side into its midpoint is passing through the midpoint of the third side

Tasks	1	2	3
Group without Cabri J	100%	46%	31%
Experimental Group	100% (9/9)	66% (6/9)	77% (7/9)

Fig. 9 - Table of the proportion of correct answers

Mediation of the notions of dependent and independent variables and of graph of a function

Let us present an example of each kind of task in a DGE taken from our work on functions and graphs of functions (Mariotti et al. 2003*)* that took place in French and Italian schools (grade 10) under the form of a long term teaching sequence (Falcade 2003).

Task 1

Points A,B and P are free points in the screen of Cabri. An unknown macro-construction provides a fourth point when showing A, B and P as input. The task of the students is to say whether it is possible to move directly each of these points and what points move when each of those points is dragged (Fig.10).

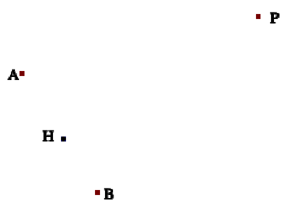


Fig.10

This task obviously introduces in the artefact the counterpart of dependent and independent variables and offers an external means for distinguishing between both. This task turned out to be a reference situation for the students. This external means was evoked by a pair of students later during the teaching sequence who hesitated between two expressions when they had to express symbolically that P is function of Q in a geometric figure: P= f(Q) or Q= f(P) ? They evoked without performing it what should happen when dragging these points. The instrumentation scheme for recognizing a variable depending on another one is the learning aim of the task.

Task 2

Students were asked to propose a geometrical construction of H starting from the three points A, B and P. Two solving strategies leading to a construction were possible:

- either by using Trace observing that H is moving on line (AB) when P is dragged and that line (PH) was always perpendicular to line (AB) (Fig.11)

- or by considering H as intersection point of two traces obtained when moving two of the free points and determining the obtained traces as curves depending only on the two free points that are not dragged (Fig.12)

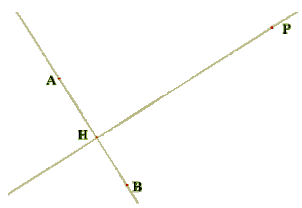


Fig.11

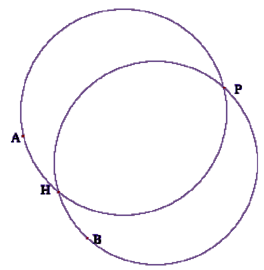


Fig.12

The notion of H as a result of a construction process starting from P is an implicit tool of the first strategy (process aspect of function).

The notion of H as intersection of curves is the implicit tool of the second strategy as well as the recognition of the geometrical curves (circles and line) from their appearance. The notion of image set as obtained when varying the independent variable is underlying this strategy.

Of course solving task 2 also involves an instrumented activity (using adequately the combination of drag and trace). This shows that very often a task may fulfill a double role creating the external tool and requiring a mathematical construction.

All students used the second strategy in Italian and French schools that allowed the teacher to introduce the notion of image set.

.

5. Conclusion

Two issues must be stressed at the end of this paper: the one dealing with the role of the teacher in the interplay between mathematics and the environment, the other one with the computer environment.

Ruthven (2002) mentioned the difficulties of designing tasks in computer environments between two extremes: on the one hand proposing tasks with great technical and conceptual demands but with the danger of being didactically uncontrolled, on the other hand developing a carefully controlled student experience with the danger to give ‘keystroke by keystroke’ instructions to students. The interplay between the mathematical dimension and the instrumental dimension is one way of solving this dilemma but only partly. The collective discussion and interventions of teacher play a critical role under various aspects such as:

- transforming what has been done by students in the task in something mathematically legitimate by introducing mathematical terminology, helping students to formulate in mathematical terms

- evoking the environment to help the students when they have difficulties when back to paper and pencil.

The instrumental dimension has always been present in the history of mathematics, be it in the treatments operated within registers as claimed at the beginning of this paper (cf. quotation of Kaput & Schorr, §1) or in the use of the available technology. Paper technology and printing technology played certainly an important role in the development of mathematics by facilitating the representation of mathematical ideas and the expression of relations by spatial configurations in the sheet of paper, not only in geometry but also in arithmetic and algebra. Dynamic geometry environments introduce a spatial representation of another key feature of mathematics, the variability. We are only at the beginning of taking advantage of the semiotic mediation potential of this new dimension in the teaching of mathematics. But even in this era of great possibilities offered by dynamic geometry environments, there is a need of pursuing the reflections on the design of interface. The deep intertwining of the mathematical and instrumental knowledge in the use of computer environments illustrated at several places in this paper implies that interface features certainly affect the construction of instrumentation schemes by the user and thus the construction of mathematical knowledge.

We would like to conclude by stressing the importance of introducing prospective teachers to the instrumental dimension of the use of technology and of making them aware of the critical role of interface features.

References

Arslan S. & Laborde C. (2003) Un outil favorisant l'interaction entre cadres, Cabri: une etude de cas dans l'apprentissage des equations différentielles. *Colloque ITEM*, Reims juin 2003

Artigue M. (2002) Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7.3,* 245-274

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. & Domingo, P (1998 a). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings from the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 24-31). South Africa: University of Stellenbosch.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D., & Gallino, G. (1998 b). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 32 –39). South Africa: University of Stellenbosch.

Bartolini Bussi M.-L. & Mariotti M.-A. (1999) Semiotic mediation: from history to the mathematics classroom *For the learning of mathematics* 19(2),27-35

Bosch M. & Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux

ostensifs *Recherches en didactique des mathématiques*, 19.1, 77-124.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Trans. and Eds.). Dordrecht: Kluwer.

Coutat S. (2003) Connaître et reconnaître des théorèmes, Mémoire de DEAEIAHD, Université Joseph Fourier, Equipe IAM-IMAG

D'Amore B. (2003) *Le basi filosofische, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Bologna, Italy: Pitagora Editrice

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261

Duval, R. (2000) Basic issues for research in mathematics education, In T. Nakahara, M. Koyama (Eds.), *Procedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 1, pp. 55-69) Hiroshima: Hiroshima University

Falcade R. (2003) Instruments of semiotic mediation in Cabri for the notion of function, *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (28 February - 3 March 2003 Bellaria, Italy), text available at http://www.crme.soton.ac.uk/tooltech/tooltechcerme3.html

Goldenberg E. P. (1995) .Rumination about dynamic imagery. In R. Sutherland & J. Mason, (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in mathematics education,* (pp.202-224). Heidelberg: Springer Verlag, NATO ASI series F, Vol 138

Guin D. & Trouche L. (1999) The complex process of converting tools into mathematical instruments : the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227.

Hölzl, R. (1996) How does the dragging affect the learning of geometry ? *International Journal of Computer for Mathematical Learning* 1(2) 169-187.

Hoyles C. & Jones K. (1998) Proof in dynamic geometry contexts In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century-An ICMI study*, C. Mammana & V. Villani (eds.) (chap. 4, section II, pp. 121-128) Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Jahn A.P. (2000) New tools, new attitudes to knowledge: the case of geometrical loci and transformations In: *Dynamic Geometry Environment, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, T. Nakahara, M. Koyama (eds.), (Vol. I, pp.I.91-I.102) Hiroshima, Japan: Hiroshima University

Kaput, J., & Schorr, R. (2002). Changing representational infrastructures changes most everything: The case of SimCalc, algebra & calculus. To appear K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on the Impact of Technology on the Teaching and Learning of Mathematics*. Available at http://www.simcalc.umassd.edu/role/rolesriframe.html

Lagrange J.-B. 2002, Etudier les mathématiques avec les calculatrices symboliques: quelles places pour les techniques ? In: In: Guin D. & Trouche L. (eds.) *Calculatrices symboliques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (ch. 5, pp.151-185), Grenoble: La Pensée Sauvage Editions

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2001). Meta study on IC technologies in education. Towards multidimensional framework to tackle their integration into the teaching of mathematics. In : M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of international group for psychology of mathematics education*. (Vol.1, pp.111-122), Utrecht, Pays Bas: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Mariotti A. (2002) Technological advances in mathematics learning In: *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lynn English (ed.) (ch..27, pp.695-723) Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum

Mariotti M.-A., Laborde C. & Falcade (2003) Function and graph in DGS environment, *Proceedings of the 26th conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (to appear)

Moreno Armella L. (1999) Epistemologia ed Educazione matematica, *La Matemetica e la sua Didattica*, 1, 43-59

Moreno Gordillo J. & Laborde C. (2003) La modélisation par des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique, *Colloque ITEM*, Reims, Juin 2003

Moreno Gordillo J. (2004) Ecuaciones differenciales en Cabri, Iberocabri 2004.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings.*

Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ruthven K. (2002) Instrumenting mathematical activity: reflections on key studies of the educational use of computer algebra systems, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 275-291

Vérillon P. & Rabardel P. (1995) Cognition and artifacts. A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* 10(1), 77-101.

PROVING AS A FOCUSING PROCESS: THE ROLE OF TOOLS AND INTERACTIONS IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT

Federica Olivero

Graduate School of Education, University of Bristol

fede.olivero@bristol.ac.uk

Abstract

This paper will discuss some findings from a study investigating the development of the proving process in a dynamic geometry environment (Cabri). The research findings suggest that the proving process can be described as a progressive *focusing process*, in which new empirical and theoretical elements (figures, statements and relationships among them, theoretical elements) emerge over time and are focused on. Many elements, *tools for focusing*, contribute to the development of the focusing process This paper will examine in particular the use of the dragging tool and the hide/show tool available in Cabri, through the analysis of students' work. Suggestions about how these *tools for focusing* may be transformed into *objects of teaching* concludes the paper.

1. Introduction

Proof and proving have been objects of investigation from the point of view of mathematics and mathematics education for the past few years. Historical and epistemological studies show that proof is a crucial activity within mathematical practice (see e.g. Balacheff, 1987; Hanna, 1996; Rav, 1999; Thurston, 1995). Didactical studies have investigated the many difficulties that students encounter when approaching proving in the classroom and research at a cognitive level has developed theoretical frameworks to interpret students' difficulties and analyse the development of the proving processes (see e.g. Bartolini Bussi, 2000; Duval, 1991; Garuti, Boero, & Lemut, 1998; Harel & Sowder, 1996; Healy & Hoyles, 1998; Küchemann & Hoyles, 2001; Simon, 2000).

Studies concerned with the use of new technologies have been investigating the use of tools to support students with proving. In particular, a strand of research has studied specifically the impact of dynamic geometry software with respect to the teaching and learning of proving in geometry (see e.g. Furinghetti & Paola, 2003; Healy, 2000; Laborde, 2001; Mariotti, 2001).

The research discussed in this paper fits within this last strand and focuses in particular on students' proving processes with respect to open geometry problems within a dynamic geometry environment. The *proving process* incorporates is defined as the process of constructing and entering the relationship *B follows from A*, or $A \Rightarrow B$, until the agents involved (in this case, the students) are satisfied with the explanation for the truth of the statement. This explanation is a proof if it satisfies the rules of logical consequence. The proving process includes both phases of the construction of a conjecture and the construction of a proof.

Current research has identified many difficulties with respect to proving. One of them is the gap between empirical and theoretical elements involved in the proving process (see e.g. Laborde, 1998). The study discussed in this paper addressed the problem of how a dynamic geometry software (Cabri) may support students in managing the relationship between the empirical field and the theoretical field within the proving process.

After introducing the key elements of the analytical framework, the paper will focus on the analysis of the dragging tool and the hide/show function Cabri through the discussion of some excerpts from students' work. The didactical implications of this analysis will conclude the paper.

2. Methodology and analytical framework

The research consisted of classroom interventions which took place in a number of secondary schools (15-17 years old pupils) in England and Italy. Students were asked to solve open geometry problems (Arsac et al, 1998) involving conjecturing and proving, working in pairs and using Cabri.

Classroom observations were carried out; pairs of students were videorecorded and students' material on paper (drawings, papers sketches, worksheets) and on the computer (Cabri files) was collected. Through a detailed analysis of this data, an analytical and explanatory framework, that identifies the key elements in the development of the proving process with respect to the affordances offered by the dynamic geometry environment, was developed.

The proving process can be observed through what students say (language) and what students do (actions) while working in pairs at the computer with Cabri and solving open problems. By talking and acting, towards the aim of constructing conjectures and proofs, students produce objects and statements which evolve throughout the process.

The focus of the analytical framework is on two kinds of transformations that the proving process involves: transformations on objects and transformations on statements. The transformations on objects involve manipulations of objects either in the Cabri environment, for example via dragging, or on paper. These objects may be transformed from particular objects into generic objects (Balacheff, 1988), which is a key element in the context of proving. The transformations on statements refer to the shifts from statements describing facts and experiences in a precise space and time to de-timed logical statements of the form 'if …then'. These last statements have a different epistemological status and these shifts are essential in the context of an approach to theoretical thinking.

The two types of transformations were observed in particular through the following categories.

- Use of dragging: the possibility of moving figures has the potentiality to change the nature and the development of the proving process.
- Use of construction elements: Cabri allows a broad flexibility with the use of construction elements, which can be added, deleted, hidden and shown and the way students deal with these possibilities has an impact on the proving process.
- Use of paper sketches: these have a different status from Cabri figures therefore the way and the moments in which students decide (if they do) to use paper sketches plays a key role in the development of the proving process.

These first three categories account for transformations on objects, while the following accounts for transformations on statements.

- Types of statements: the evolution of the different statements produced over the process, which leads to the final de-timed conditional form of the conjecture 'if … then' is a key element of the proving process.

Finally, I observed other elements which depend on the previously listed ones.

- The interaction between the students and Cabri, which shows the way the students exploit and incorporate the computer in their solution strategies in general.
- The interactions between students, which show how the software mediates and make explicit the proving processes.

- The interplay between the spatio-graphical field and the theoretical field (Laborde, 1998): this category describes the role of empirical and theoretical elements in the proving process and the way the students manage their interplay.

Figure 1 represents the analytical framework[1].

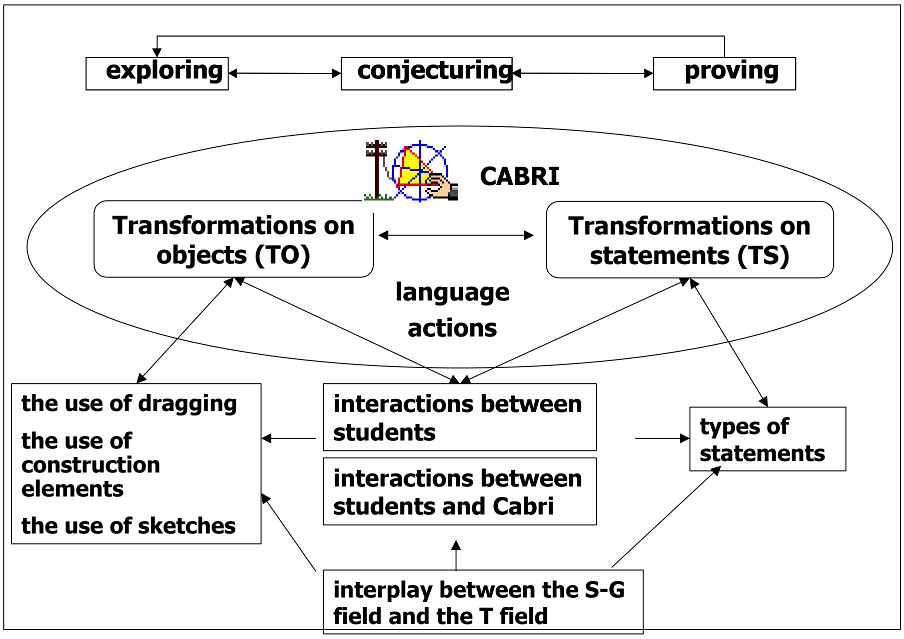


Figure 1.The analytical framework

3. A focusing process

The analysis of students' proving processes has shown as a main result that the proving process can be described as a progressive *focusing process*, in which new empirical and theoretical elements (figures, statements and relationships among them, theoretical elements) emerge and are transformed over time by the students towards the construction of conjectures and proofs.

The *focusing process* requires what Godfrey refers to as "developing a *geometrical eye*" which he defines as "the power of seeing geometrical properties detach themselves from a figure" (Godfrey, 1910, p.197). Fujita & Jones (2002) illustrate the idea of geometrical eye with an example. Consider the problem: if A and B are the midpoints of

[1] There are other relevant elements which affect the proving process, e.g. the interaction between the students and the teacher, but these were not included because this research focuses more on the learning point of view and the unit of analysis is the student (or pairs of students) with the computer. More details on the analytical framework are in Olivero (2002).

the equal sides XY, XZ of an isosceles triangle, prove that AZ=BY. In order to be able to prove this one needs to 'see' first of all that, for example, triangles AYZ and BZY are likely to be congruent.

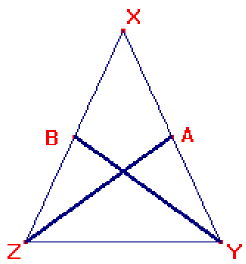


Figure 2. Developing a geometrical eye

Precisely, a key element of the proving process is developing the capacity of focusing on the appropriate objects at the appropriate time in the process and being able to change focus whenever needed, whenever new elements are discovered and whenever new theoretical elements emerge. In the previous example one needs to '*see* two triangles as congruent', i.e. triangles AYZ and BZY need to become the object of the focusing process and the property of being congruent needs to "detach" itself from the figure. The elements of the analytical framework previously identified can be seen as *tools for focusing* (Figure 3).

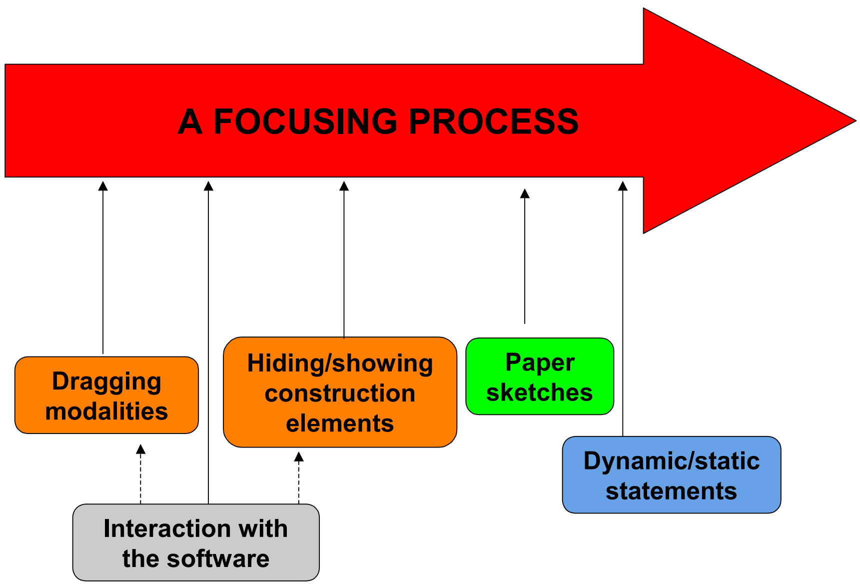


Figure 3. A focusing process

4. The dragging tool

Why analysing dragging? As many research on the use of dynamic geometry has shown, movement is a “third dimension” of Cabri figures (Moreno-Armella, 2004) and “line segments that stretch and points that move relative to each other are not trivially the same objects that one treats in the familiar synthetic geometry and this suggests new styles of reasoning” (Goldenberg, 1995).

In the context presented in the previous sections, the research problem to investigate becomes: as dragging is one of the “new” tools that dynamic geometry software offer with respect to paper & pencil environments, how does it contribute to the development of the proving process? In particular,

- What are the key dragging modalities that students use towards the construction of conjectures and proofs?
- What is the focus of attention when dragging during the proving process?

The next section will focus on the analysis of an episode from two Italian students, which shows how different dragging modalities may lead to different developments of the proving process in Cabri.

4.1 Different interpretations of dragging: the case of Bartolomeo and Tiziana:

Bartolomeo and Tiziana are 15 year-old students from a Liceo Scientifico in Italy. They used Cabri twice before this activity. The problem they are given is the Perpendicular bisectors of a quadrilateral:

You are given a quadrilateral ABCD. Construct the perpendicular bisectors of its sides: a of AB, b of BC, c of CD, d of DA. H is the intersection point of a and b, K of a and d, L of c and d, M of c and b. Investigate how HKLM changes in relation to ABCD. Prove your conjectures.

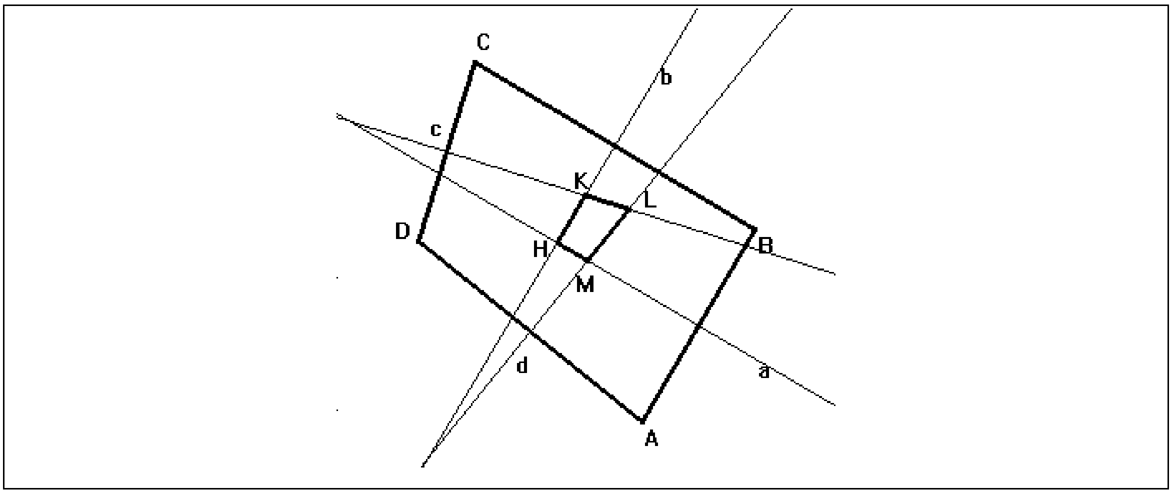


Figure 4. The perpendicular bisectors of a quadrilateral

After having constructed the figure in Cabri, Bartolomeo and Tiziana start exploring. Tiziana is controlling the mouse.

69	Tiziana drags ABCD into a rectangle (Figure 5)	
70	Bartolomeo:	what have you done, **a rectangle?**
71	Tiziana:	yes, well…
72	Bartolomeo:	**so… it is a point… try to make it bigger…**
73	Tiziana:	eh, how can I do that?
74	Bartolomeo:	just dragging!
75	**Tiziana drags D up and stops** to observe and think (Figure 6)	
76	Tiziana:	**excuse me! This (she points at LM) follows what this (AB) does, this (LK) follows this (AD) …** (she laughs)
77	Bartolomeo:	let's examine some more cases
78	Tiziana drags A up and gets Figure 7.	
79	Bartolomeo:	**ah, when it's a rectangle it's always a point…** (he writes down the second conjecture) … if… shall I write "disappears" or "is a point"? It's a point…
80	Tiziana:	no, because **now it's a point too (Tiziana dragged B so that ABCD is not a rectangle but HKLM is still a point**).
81	Bartolomeo:	eh …well.., but if it is a rectangle it is a point … it's not the only case …
82	Tiziana drags B fast, but she slows down when she is nearby the positions which make HKLM a point	

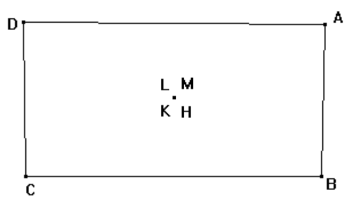


Figure 5

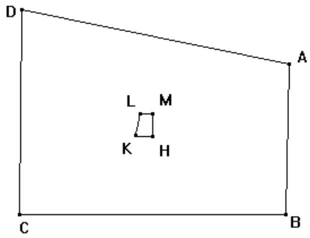


Figure 6

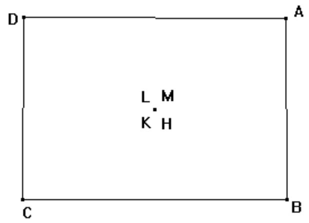
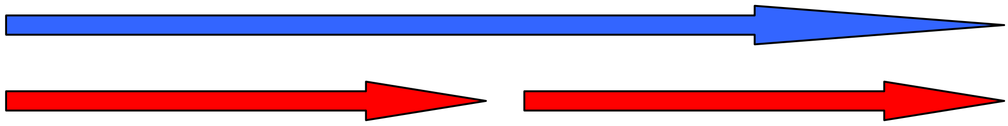


Figure 7

B

T



This episode is paradigmatic in showing how the same dragging event (produced by Tiziana and observed by Bartolomeo and Tiziana) may be approached in two completely different ways by the students. The analysis will show how the different interpretations may lead to different developments of the proving process.

In 72 ("try to make it bigger"), 77 (let's examine some more cases") and 79 ("when … it's a …") Bartolomeo shows how he wants to use Cabri, that is to produce and check conjectures in a very systematic way. He pays attention only to the initial and final figure (Figure 5) and (Figure 7), as two snapshots of a film, as his aim is clear: checking if HKLM is always a point when ABCD is a rectangle. As soon as Tiziana stops dragging he formulates a conjecture (79). Bartolomeo is (indirectly[2]) doing what I named *photo-dragging*, which is a type of dragging that relates to the strategy of examining particular cases and using dragging to validate conjectures. The object of focusing for Bartolomeo is the whole 'rectangle outside-point inside'.

On the contrary, Tiziana is observing the figure over the dragging which takes her from Figure 5 to Figure 7, through Figure 6, 'reading' what the figure suggests. She stops in 75 and reads a relationship between elements of the figure: she sees a relationship between the sides of ABCD and of HKLM. In a sense, we can say she is 'dragged by dragging', as she observes the figure while moving and stops when she sees something interesting; she looks at the film that occurs in front of her eyes and is produced by her. This type of dragging has been called *film-dragging* and seems to be related to a more open exploration strategy, which aims to use the software to discover facts and

[2] Bartolomeo is doing an 'indirect' dragging because it is Tiziana who is producing the movement as she is in control of the mouse.

relationships rather than to validate or test ideas and conjectures. The object of focusing for Tiziana is the relationship between the two quadrilaterals.

These two ways of using and interpreting a same dragging episode (produced by Tiziana and observed by Bartolomeo and Tiziana) do have an impact on the development of the proving process as they focus on different objects. The modality used by Bartolomeo represents a more controlled and in a way 'restrictive' use of the software, that sometimes may hinder (or not favour) the discovery of new facts or phenomena. In fact, the observation made by Tiziana, which is the starting point for the most general conjecture (ABCD and HKLM are similar), is ignored by Bartolomeo and will be transformed into a conjecture only towards the end of the proving process. The fact that Tiziana is in control of the mouse and is doing the dragging does not automatically imply that she is the one leading the proving process. On the contrary, Bartolomeo's words direct Tiziana towards the type of dragging he would do if he had the mouse. Tiziana listens to what Bartolomeo says but at the same time she does her own dragging and stops whenever she sees something interesting, even though she does not immediately transform what she sees into conjectures. However, Bartolomeo keeps telling Tiziana what he wants until she finally gets a rectangle. Generally speaking, it has been observed that the person who does not have the mouse can actively participate in the exploration and the choice of solution strategies because Cabri, as opposed to paper and pencil, seems to work as a "shared space of communication" (Olivero, 2003) in which students may carry out and share the proving process.

This short episode has shown how the solution process of an open problem in Cabri may take quite different paths according to how the potentialities of dragging is exploited by the students with respect to the focusing process.

4.2 Dragging Modalities

A preliminary classification of the dragging modalities is in (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Olivero, 1999). The study discussed in this paper refined that classification and analysed the dragging modalities used by the students in the proving process towards the construction of conjectures and proofs.

The modalities prevalently used by the students are:

- *dragging test*, which consists of moving dragable or semi-dragable points in order to see whether the figure keeps the intended properties;

- *wandering dragging*, which consists of moving the basic points on the screen without a predefined strategy in order to discover particular configurations or regularities (this is what Tiziana does in the extract above);
- *guided dragging*, which consists of dragging the basic points of the initial figure in order to give it a particular shape (see for example the case of Bartolomeo), or to give another figure a particular shape;
- *lieu muet dragging*, which consists of moving a basic point of the initial figure so that the dependent figure keeps a discovered property (e.g. dragging ABCD so that HKLM is always a point in the problem of the perpendicular bisectors of a quadrilateral, which is what Tiziana does at the end of the previously discussed extract) - this means that one of the basic points is describing a hidden path (lieu muet) - or moving basic points along a given (not visible) path (e.g. following the prolongation of a diagonal of a quadrilateral).

4.3 Dragging as a focusing tool

From a detailed analysis of students' work[3] (the episode of Tiziana and Bartolomeo is an example) we can gather the following conclusions.

Different dragging modalities are used by students at different times and with respect to different aims in the proving process. In some cases it is possible to identify specific dragging modalities for particular students, i.e. each student seems to use the same dragging modality throughout the proving process. For example, Bartolomeo mainly uses guided dragging throughout the proving process and Tiziana mainly uses wandering dragging.

In general, the use of different dragging modalities provides a change in what is being focused on and determines a privileged direction for the proving process. For example, the guided dragging pursued by Bartolomeo leads the way to an ordered exploration of particular cases, leaving the discovery of the more general conjecture to the end of the proving process.

[3] See Olivero (2002).

Lieu muet dragging is the crucial modality, which fosters the production of general conjectures, transforming descriptions or facts into conditional statements or relationships; however students do not frequently and spontaneously use it.

In general, we can observe a sequence in the use of dragging modalities during the proving process, as Figure 8 shows. Dragging can then be considered a focusing tool. Guided dragging is a way of creating a focus on a particular figure, which has been previously discovered or thought of (see example of Bartolomeo). With wandering dragging, from an exploration of a situation that appears to be ‘at random’ or not following a pre-specified plan, some regularity or invariance emerges and is focused on (see the example of Tiziana). With lieu muet dragging a change in how the figures are seen takes place and new relationships are seen and placed in the *web of relationships* which is being constructed.

To conclude, all dragging modalities are important and in the case where all of them are used at appropriate times in the proving process we see a successful construction of conjectures and proofs. In such cases an integration of conjectures and proofs and a successful management of empirical and theoretical elements is observed (Olivero, 2002).

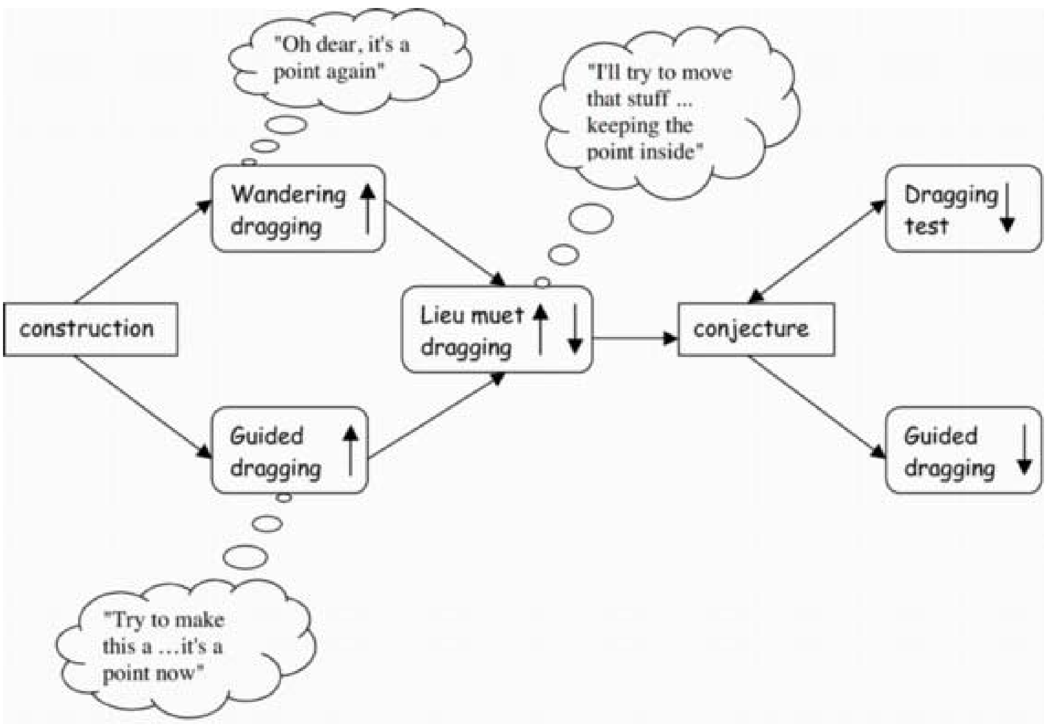


Figure 8. Evolution of dragging modalities

5. The hide/show function

In Cabri, after a figure has been constructed there is the possibility of hiding and showing any element of that figure, which is a feature not available in paper and pencil. As we can see from Figure 9, hiding or showing elements of the configuration at stake changes the nature of the figure to explore because what is visible changes and therefore the potential elements of the focusing process change too.

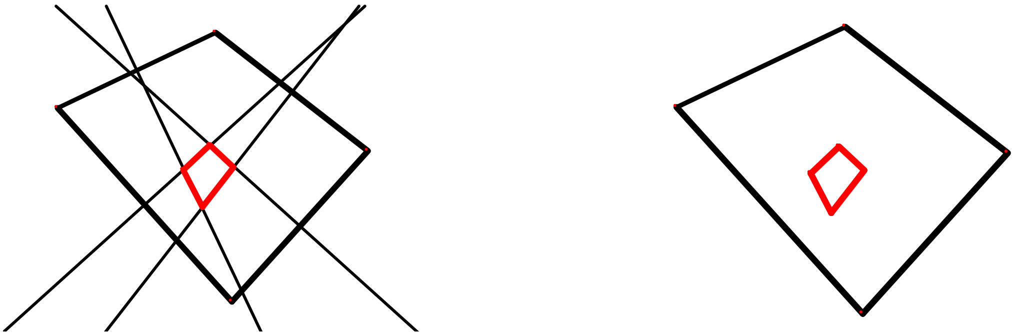


Figure 9. Hiding and showing construction elements

In the context of the study discussed in this paper, the research problem tackled is:

- How does the use of the hide/show function affect the proving process and the way the focusing develops?

In this study I have considered in particular the hiding and showing of construction elements, i.e. the elements that link a basic figure with a figure that is dependent on it; for example in the problem of the perpendicular bisectors of a quadrilateral the construction elements are the perpendicular bisectors and the basic objects are the sides of the initial quadrilateral (or the quadrilateral itself).

Three clearly different ways of working with construction lines appear in the students' proving processes:

- hiding construction lines from some point of the conjecturing onwards and not showing them again;
- hiding construction lines when exploring and showing lines when proving;
- leaving construction lines visible at all times.

Together with the dragging modalities, the different modalities of using the hide/show function have an impact on the development of the proving process, as it is shown by the following examples.

5.1 A systematic use of the hide/show function: the case of Bartolomeo and Tiziana

Bartolomeo and Tiziana have a very systematic way of hiding and showing construction elements (the perpendicular bisectors): they hide the construction lines when exploring and they make them visible when proving (Figure 10).

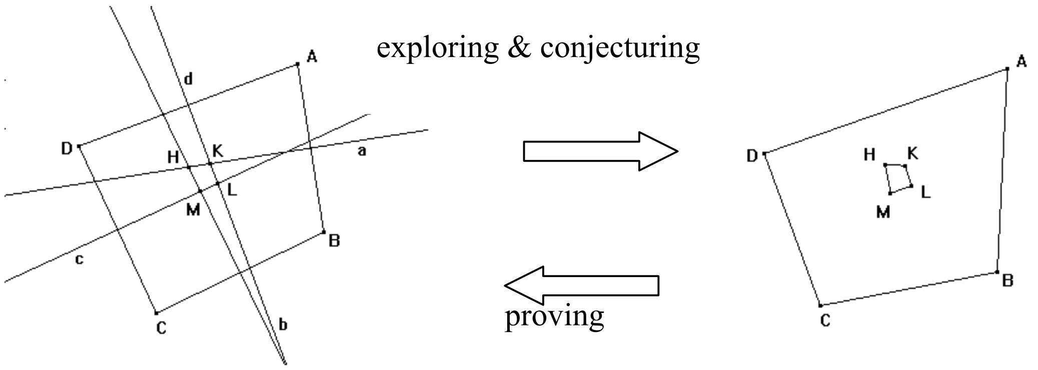


Figure 10. Hiding and showing construction lines.

Bartolomeo and Tiziana hide the construction lines straight after finishing the construction before starting the exploration with dragging, leaving only the two quadrilaterals ABCD and HKLM visible.

55 Bartolomeo: **delete** the lines, the points are connected anyway.

While saying this, they transform ABCD from the configuration on the left to the configuration on the right in Figure 10. The perpendicular bisectors are no longer needed as "the points are connected anyway": the perpendicular bisectors are seen as a tool to construct HKLM and once this is constructed they can be 'deleted'[4].

Afterwards, the perpendicular bisectors are made visible again every time the students attempt to prove something.

233 Bartolomeo: here you are … so another trapezium is formed. Let's **prove** it. So let's **put the perpendicular bisectors again**.

The bisectors are then hidden when they continue with the exploration process.

198 Bartolomeo: so we need to look at the rhombus.

199 Bartolomeo hides the perpendicular bisectors and then drags A, D and B.

The modality of using the hide/show function shown by Bartolomeo and Tiziana has an impact on the perception of figures on the screen. Hiding the construction lines allows isolating the two quadrilaterals and therefore induces the formulation of conjectures on

[4] The hide/show function allows objects to be hidden without actually being deleted.

the relationships between the shapes of the two quadrilaterals. When the proving phase starts, the students show the necessity of making other information visible, i.e. the original construction. However, it has been observed that showing the construction lines is not always sufficient to recall all the properties that were used in the construction itself, as shown by extract below.

175	Bartolomeo:	so, wait, **if this is a right angle** I can say that…
176	Tiziana:	no, **but it's not** a right angle, what are you talking about? So
177	Bartolomeo:	… it must be, otherwise they are not parallel […]
192	Bartolomeo:	… so… let's do this… but look, here there are four right angles, otherwise they are not parallel
193	Tiziana:	oh dear, **look!… the perpendicular bisector**, isn't it? (she points at b) There is always a right angle!

While proving the case of the parallelogram, Bartolomeo and Tiziana completely forget about the fact that the lines they made visible again (the perpendicular bisectors), are actually perpendicular bisectors, i.e. lines perpendicular to the sides of ABCD. They spend time in constructing a proof in which something is always missing, that is a right angle which is there but is not 'seen' until the very end of the proof.

5.2 Construction lines always visible: the case of Debora and Giulia[5]

Debora and Giulia leave the construction lines visible at all times during the proving process. The extract below shows how this affects their attempt to prove a conjecture which is based on visual elements only and does not bring in any theoretical element.

189	Debora:	this is congruent to this (Ac'Mb' and Kd'Ca')[6], this is congruent to this (aBbH and DcLd) this is congruent to this (Hbd'K and MLdb') this is congruent to this (c'aHM and Lka'c) [looking at Figure 11]
190	Giulia:	**the figures internal to the quadrilateral, excluding HKLM, are congruent in pairs respectively**
191	Debora:	the opposite are congruent […]
234	Debora:	I'm trying to understand from which point to look at it .. if this one …then it becomes something like that. I can't understand which are the biggest sides …**ah, it's upside down!**
442	Giulia:	**so, proofs**. We must prove it is an upside down rhombus …here is the stor

[5] Debora and Giulia are 15 year old Italian students and have used Cabri only once before this classroom session. They were asked to solve the problem of The perpendicular bisectors of a quadrilateral.

[6] a, b, c, d, a', b', c', d' are used by the students to indicate the intersection points of the perpendicular bisectors with the sides of ABCD.

the story … the congruence stuff. So, let's start from the things we know. We know that this bit (points at Bb with fingers) equals this bit (bC) because this one (b) is a perpendicular bisector… this bit (points at Cc with fingers) equals this bit (cD) because this one (c) is a perpendicular bisector, this bit (points at Dd with fingers) equals this bit (dA) because this one (d) is a perpendicular bisector, this bit (points at Aa with fingers) equals this bit (aB) because this one (a) is a perpendicular bisector. Let's start from these two big figures: this one (Ac'Ld) and this one (Ha'Cb). Can you see them? So, we know that this bit (AdKa) equals this bit (Lc'Bd'), this bit (HcCb) equals this bit (Ha'Db'). No!…no! We must change figure, but the problem is that we can only consider those figures!

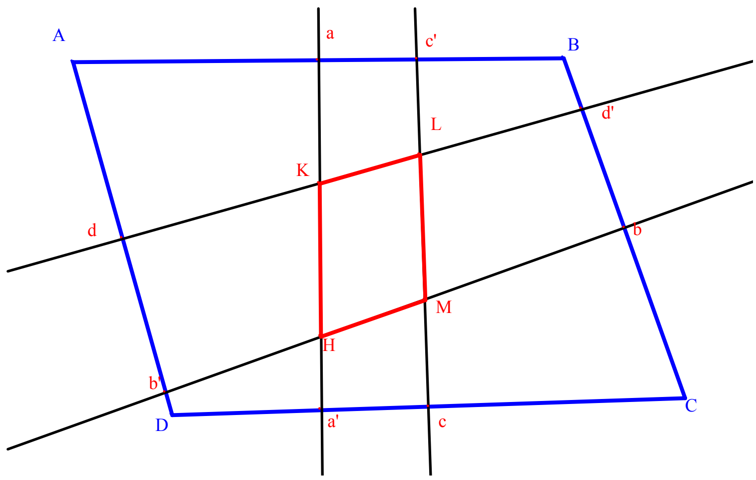


Figure 11. Showing construction lines

The students' exploration up to this moment happens within the spatio-graphical field, as Debora and Giulia are trying to 'read' the figure and the statements they produce are descriptions of facts which can be observed on the Cabri figure (189-191). We can see that the fact that the construction lines are visible has an impact on the conjecturing process: the students focus the attention on the small parts in which ABCD is divided by the perpendicular bisectors rather than on the two quadrilaterals ABCD and HKLM. Figure 11, in which all construction lines are visible, shows both how the multitude of the small quadrilaterals in which ABCD is divided and the possible congruencies amongst them may capture the attention and how difficult it is to 'see' the two quadrilaterals ABCD and HKLM and the relationship between them.

Line 442 is the starting point of the proof for conjecture 'If ABCD rhombus then HKLM rhombus'. As we can see, what Debora and Giulia want to prove is exactly what they focused on in the exploration (as shown in the previous lines), that is the congruence of the quadrilaterals formed inside ABCD and external to HKLM. This focus does not lead them anywhere, and they remain at a spatio-graphical level for a long time, without succeeding in constructing a proof.

5.3 Hide/show as a focusing tool

The use of the hide/show function is linked to the dialectic between the spatio-graphical fild and the theoretical field and to the way in which different elements are focused on, as discussed below.

The hide/show function is a *focusing tool* in itself because the possibility of showing or hiding elements naturally allows focusing on different things. When the construction lines are hidden, then the exploration takes place at a more visual level and theoretical elements do not always play a role or emerge in that process. In this case students do not usually pay attention to the construction and therefore to the geometrical link between the two quadrilaterals at stake. Sometimes, the construction elements may be forgotten, and the geometrical properties necessary for proving (e.g. the hypotheses) may not be used because they are/were 'hidden'; which is what happened in the case of Bartolomeo and Tiziana.

When the construction lines are visible, then the link between the two quadrilaterals is explicitly visible and in general the exploration already contains some justification elements (Olivero, 2002). However, this situation requires a stronger theoretical control over the figure as there are more elements that need to be appropriately managed at the same time. For example, for Debora and Giulia, the fact of having the perpendicular bisectors visible has a negative effect: once they stop dragging, the students are not able to distinguish parameters and variables, and consequently hypothesis and thesis. All lines seem to have the same status, so that what they 'see' on the screen is a figure split into many small quadrilaterals by the perpendicular bisectors rather then two quadrilaterals linked through the perpendicular bisectors. Hölzl (2001) deals with similar issues and suggests that we need to find ways to help students focus on invariants rather then focus on details which suppress the overall. In other words, there is the need to develop a *geometric eye* that *sees* and focuses on what is relevant only. The role of the teacher would play a fundamental role with respect to this issue.

There is a strong link between what you see and what you use in constructing a proof. And given that in Cabri you can decide what to show and what to hide, you may have control over the theoretical elements you want to use. This sets questions related to how the theory is/can be made explicit during the proving process. As other research has shown constructing geometric figures in Cabri fosters theoretical thinking (Mariotti, 2001). In fact, in order to construct a figure in Cabri, the geometric properties of that figure are needed for the construction itself. If a figure is drawn in Cabri in the same way as on paper (i.e. reproducing a mental image associated with a particular name, which however does not necessarily contain its properties - e.g. a square is something that looks like Figure 12, but while drawing it on paper the properties of having equal sides and right angles are not necessarily evoked), then that figure does not pass the dragging test, i.e. it will be messed up when dragging it.

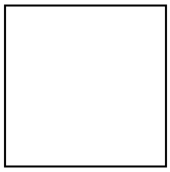


Figure 12

However, the situation is different when some constructions are required on a general quadrilateral, as for example in the open problems used in this study (e.g. constructing the quadrilateral formed by the intersection of the perpendicular bisectors of a given quadrilateral). In Cabri, the fact that there is a menu command that constructs the perpendicular bisector of a segment, allows the students to use it without thinking about the property of the perpendicular bisector with respect to the segment. The only thing to do is to find and use the command. On the contrary, if they were constructing perpendicular bisectors with pencil and paper they would need to think about how to draw them, i.e. they would need to know that they are perpendicular to the side and go through its midpoint. Therefore in Cabri the geometric properties are not needed at the beginning and probably are not evoked. This would explain why some students seem not to pay attention to the properties of the construction (e.g. the fact that perpendicular bisectors are perpendicular to a side) while proving (as in the case of Bartolomeo and Tiziana).

6. PROVING WITHIN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT: A FOCUSING PROCESS

Cabri is a dynamic geometry environment and as such it allows a process of "story-telling" (Mason & Heal, 1995), in which, according to the elements students see and focus on while telling the story in Cabri, different conjectures and elements for proving may appear. Therefore Cabri seems to constitute a space that fosters the development of a focusing process through the dialectic between the spatio-graphical field and the theoretical field.

Interpreting the proving process as a focusing process may provide a theoretical explanation for how Cabri is useful for the construction of proofs, even if (usually) it is not directly used in that phase[7]. The influence of Cabri in the construction of the proof relies on the fact that it gives you the idea for the proof. While working in Cabri during the discovering process many elements become visible, because of the fact that you can move the figure. The figure can be seen from different perspectives, everyone can see different things on the same figures and many things because it is dynamic. Once you focus on some particular elements, then these elements could be the same ones to be used in the proof. So even if Cabri is not directly used in the construction of the proof, it plays a very important role in determining the key elements to focus on and as such provides a *cognitive unity* (Garuti, Boero & Lemut, 1998) between conjecturing and proving.

7. DIDACTICAL IMPLICATIONS

As we said in the beginning "Line segments that stretch and points that move relative to each other are not trivially the same objects that one treats in the familiar synthetic geometry, and this suggests new styles of reasoning" (Goldenberg, 1995). Therefore, it is important that teachers are aware of this fact and open to face new ways of reasoning students may show when working with dynamic geometry and the *Cabri-geometry* (Holzl, 1996). As a consequence, the *tools for focusing* should become *objects of teaching/learning*.

The analysis of the extracts in this paper (together with the other cases part of the project) shows that different dragging modalities are used with different purposes by different students throughout the proving process. All of them may be useful and support the proving process if used with an appropriate aim and at an appropriate moment. It was also observed that the wider the range of dragging modalities used the

---

[7] All the students observed in this study do not use dragging when constructing proofs but work on a static figures, sometimes adding new elements (lines, segments).

more successful the formulation of general conjectures and proofs. This suggests that there is a need to make these different dragging modalities explicit so that students are aware of them and have the possibility of choosing the one most suitable to the task they are dealing with. In fact, “students do not, in general, seem to know how to perform meaningful experiments” (Holzl, 2001).

The possibility of hiding and showing elements in Cabri is a ‘new’ powerful tool of dynamic geometry software, because according to what is left visible the focus can shift to different elements. It is important that students are aware of this possibility and of how it can be exploited. Showing lines, together with dragging the figure, will help the students to keep in mind the properties of the construction. Hiding some elements may be useful when wanting to focus on some particular configuration.

One of the key elements that allows the *focusing process* to happen is possibility of having a field of experience (provided by Cabri, paper and pencil etc) which allows students to manipulate, interact, and change the objects they deal with: it is an empirical experience which is likely to evoke theoretical elements that become part of the focusing process towards the formulation of conjectures and construction of proofs. If we compare a dynamic geometry environment with a paper and pencil environment, we can say that the second one would not have the same dynamics and flexibility of the first one. Starting with a figure on paper requires you to decide what figure you want to draw first. And then the figure is static; it is the same throughout the discovering process and cannot be moved or changed continuously. So it is more difficult to see the figure from different perspectives and let key elements come evident to your eyes.

The previous discussion leads to broaden the perspective that considers dynamic geometry environments only as add-ons, i.e. as environments that provide students with resources that experts usually possess, and as such need to be abandoned at some stage in the learning process. This study has shown that it is necessary to take into account the potentiality of this type of software (and more generally of new technologies) to generate new problems and perspectives with respect to paper and pencil, that affect *doing mathematics*. To conclude, I would like to paraphrase Godfrey’s statement “Drawing is not to be abandoned at a definite epoch in the geometry course: practice and theory should advance hand in hand” (Godfrey, 1910), into Cabri is not to be abandoned at a definite epoch in the geometry course: Cabri and theory should advance hand in hand”.

References

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème Ouvert et Situation - Problème*. Academie de Lyon: IREM.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Bartolini Bussi, M. (2000). *Early approach to mathematical ideas related to proof making.* Paper presented at the ICME9, TSG12: Proof and Proving in Mathematics Education, Tokyo, Japan.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: developing the 'geometrical eye'. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 384-391). Norwich, UK.

Furinghetti, F. & Paola, D. (2003), To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study, *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 397-404). Honolulu, Hawaii.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345-352). Stellenbosh, South Africa.

Godfrey, C. (1910). The Board of Education Circular on the Teaching of Geometry. Mathematical Association. *Mathematical Gazette, 5*, 195-200.

Goldenberg, E. P. (1995). Ruminations about dynamic imagery (and a strong plea for research). In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in mathematics education* (pp. 202-224). Berlin: Springer-Verlag.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-33). Valencia, Spain.

Harel, G., & Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 59-66). Valencia, Spain.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *PME24* (Vol. 1, pp. 103-117). Hiroshima, Japan.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). Students' Performance in Proving: Competence or Curriculum? In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 153-167).

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*, 169-187.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations - a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 63-86.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2001). Investigating factors that influence students' mathematical reasoning. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Utrecht, The Netherlands.

Laborde, C. (1998). Relationship between the spatial and theoretical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. In J. D. Tinsley & D. C. Johnson (Eds.), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 183-195). London: Chapman & Hall.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Mariotti, M. A. (2001). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 25-54.

Mason, J., & Heal, B. (1995). Mathematical Screen Metaphors. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 291-308). Berlin: Springer-Verlag.

Moreno-Armella, L. (2004). *Matemática dinámica y sus procesos de validación.* Paper presented at the IberoCabri 2004, Saltillo, Mexico.

Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. In W. Maull & J. Sharp (Eds.), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (CD-ROM)*. Plymouth, UK.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. PhD thesis, University of Bristol, ISBN 0-86292-535-5.

Olivero, F. (2003). Cabri as a shared workspace within the proving process. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 429-436). Honolulu, Hawaii.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica III, 7*, 5-41.

Simon, M. A. (2000). Reconsidering mathematical validation in the classroom. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Hiroshima, Japan.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*(1), 29-37.

Cabri-Géomètre en la Educación Matemática de México.

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen:
El presente documento consta de tres partes: en la primera se reportan diversas investigaciones educativas que están en curso en México; en la segunda se presentan actividades diseñadas para el proyecto EMAT, la nueva etapa de introducción de la Geometría Dinámica con Cabri – Géomètre; la tercera parte presenta algunas posibilidades que aún no son muy exploradas al usar esta herramienta en el salón de clase. El documento no pretende ser exhaustivo con toda la investigación educativa actual, sino más bien proporcionar una muestra de los temas y las expectativas de la Geometría Dinámica en el país.

Introducción

El Proyecto de Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), apoyado por la SEP para el nivel secundaria, eligió diferentes paquetes de cómputo para desarrollar en las aulas actividades con propósitos educativos mediante distintas tecnologías. Cabri – Géomètre fue uno de los paquetes de cómputo elegidos. El proyecto arrancó en el estado de Coahuila en 2000.
Paralelamente a este proyecto, se han desarrollado diferentes investigaciones educativas, que pretenden indagar dificultades en el aprendizaje de diversos temas de matemáticas en México. La muestra de investigaciones ha de tomarse con reservas: sólo es representativa en la medida del ámbito de investigación del autor. Hecha esta aclaración, en la siguiente sección se consigan temas y se comentan muy escuetamente algunos resultados.

Algunas investigaciones en México.

Los siguientes títulos dan cuenta de tesis de diferentes niveles que se han defendido o bien se encuentran desarrollándose para ser defendidas. Son tesis enfocadas a temas de matemáticas a nivel medio superior y superior, dos de ellas retoman construcciones para presentar temas de optimización y las restantes pueden adscribirse a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Por razones de espacio los comentarios serán tan sólo breves referencias.

Transparencia y Opacidad de una noción matemática: Objeto geométrico mediado por el entorno computacional Cabri-Géomètre, el caso del principio de Cavalieri. Tesis de doctorado en Matemática Educativa concluida. Díaz Barriga Arceo, Eugenio. En ella se plantean actividades en dos y tres dimensiones que tienen como propósito descubrir si los estudiantes son capaces de escribir en sus palabras el enunciado del principio de Cavalieri.

Estrategias argumentativas en la solución de problemas geométricos: el razonamiento dinámico. Tesis de doctorado en Matemática Educativa en proceso Sandoval Cáceres, Ivonne T. Se investiga sobre las relaciones que subyacen en las ideas de dibujar y construir, las relaciones que surgen al interpretar una representación geométrica. Se señalan algunos resultados relevantes al usar Cabri, referentes al uso e interpretación de la medición, a la interdependencia entre dibujo y construcción, entre otros.

El desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático en ambientes de resolución de problemas. Tesis de doctorado en Matemática Educativa en proceso. Benítez Mojica, David. Se presentan resultados relativos a la formulación y seguimiento de conjeturas, la búsqueda de contraejemplos e indicios de demostración en la resolución de problemas por parte de estudiantes universitarios de primer año de la carrera de matemáticas.

Problemas de Optimización a través de un software de geometría dinámica como una experiencia previa al cálculo. Tesis de maestría en Matemática Educativa concluida. Ríos Cárdenas, Martín Raymundo. Las sesiones propuestas están enfocadas a la visualización matemática de la optimización, el diseño experimental se adscribe a ejercicios en el plano que enfatizan la variación antes que tratar directamente el cálculo de máximos y mínimos, los sujetos estudiados son profesores a nivel secundaria.

Diseño y prueba de una metodología de trabajo para caracterizar las situaciones de cambio en los problemas, esencialmente geométricos, de aplicación de máximos y mínimos. Tesis de doctorado en Matemática Educativa en proceso. Nieves Hurtado, Antonio. Un amplio bosquejo histórico de los problemas de optimización, se busca diseñar actividades que favorezcan la lectura de la información cualitativa de las gráficas y las tablas numéricas; se buscará dar cuenta de las habilidades presentes lo que el autor llama "calculo intuitivo".

Procesos de visualización en Geometría a través de Transformaciones apoyados con Cabri-Géomètre. Tesis de doctorado en Matemática Educativa en proceso. Aguirre Tapia, Minerva.

Aditamentos tecnológicos en la Educación, los conceptos de derivada e integral desde un punto de vista geométrico: hacia un curso con Cabri-Géomètre. Tesis de licenciatura en Física y Matemáticas concluida. Cerón López, Juan Gabriel. Se reportan actividades dirigidas a tratar las interpretaciones geométricas de la derivada y de la integral.

Ejemplos de actividades en el proyecto EMAT – Coahuila.

Mostraremos dos ejemplos de las actividades del libro "Geometría dinámica", que publicó la SEP para secundaria: "Bisectriz, altura, mediana y mediatriz de un triángulo cualquiera", pg 82 y "Recubriendo el plano con polígonos regulares", pg 106.

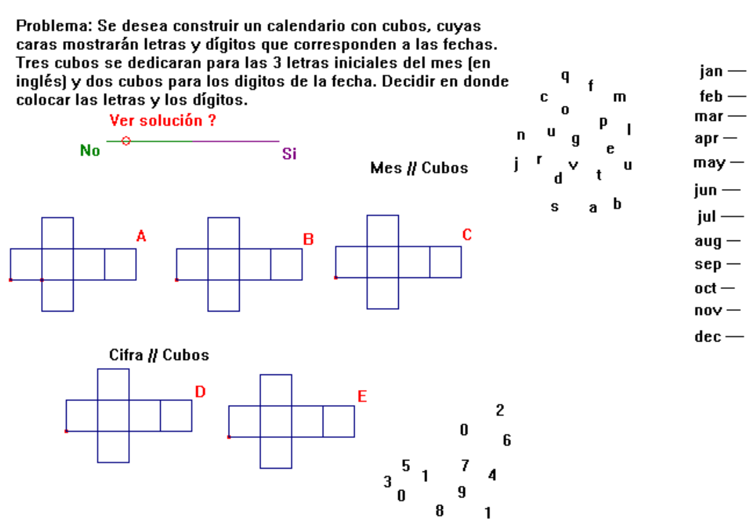
Haciendo un análisis del texto de SEP se observa en primer lugar, como lo muestran las actividades de ejemplo, que no se utiliza la idea de definir macros, concepto potente para el estudiante. Como es conocido en el medio, un micromundo cualesquiera permite la posibilidad de hacer que la interfase crezca mediante procesos que defina el estudiante. Acordes con un enfoque constructivista, es patente que se debe promover que el estudiante construya sus propios conocimientos y la creación de macros dentro de la Geometría Dinámica de Cabri-Géomètre es una herramienta versátil que puede emplearse con este fin.
La interfase de Cabri permite realizar dicha actividad de definición de nuevos comandos a partir de primitivas geométricas. Pero esto no es todo: pueden crearse macros numéricas y

lógicas que impulsen dentro de la interfase el trabajo en al menos cuatro diferentes registros de representación: el registro geométrico, el registro numérico, el registro algebraico y el registro verbal. Todo sin salir de la interfase.
Otra clase de actividades no consideradas en el libro de SEP son aquellas del tipo de conjeturar qué lugar geométrico genera un objeto dependiente en una construcción al desplazar cierto objeto libre. Recordemos que uno de los métodos clásicos de solución de problemas geométricos de construcción es el llamado método de los lugares geométricos. Su presentación en la currícula de secundaria, con problemas que generen segmentos, rectas, arcos, circunferencias, etc, abre la posibilidad a que los estudiantes conozcan tempranamente las primeras curvas matemáticas como soluciones de diversos problemas. El tratamiento conjunto de las representaciones geométrica, numérica, algebraica y verbal proporciona a los estudiantes una visión integradora de la idea de lugar geométrico, el cual por lo general se encuentra restringido a tan solo a la idea de gráfica de una función.
Desde luego, existen alternativas distintas a estos dos señalamientos que nos parecen importantes dado el enfoque constructivista que se pretende con la introducción de la Geometría Dinámica en el salón de clase.

Posibilidades de innovación en el salón de clase

Cabri puede usarse arrancando desde una pantalla en blanco o bien desde una lección ya construida de antemano. El uso de macros puede adscribirse fácilmente en la primera posibilidad y hemos señalado que tanto las macros cuyos objetos finales son números o texto, están ausentes del uso generalizado en el salón de clase; las más populares son desde luego las macros geométricas.
Iniciar desde una lección ya preparada es una alternativa que presupone haber cubierto temas previos; la gama de lecciones posibles es muy rica. Observamos que, aparentemente, las actividades de comparación y visualización no cuentan con grandes espacios dentro de la currícula actual. También sabemos que el trabajo en el registro verbal cobra mucha importancia en relación a los demás registros (geométrico, numérico, algebraico). Daremos en seguida algunos ejemplos de actividades que consideramos con grandes posibilidades de éxito para el aprendizaje de diferentes temas matemáticos.

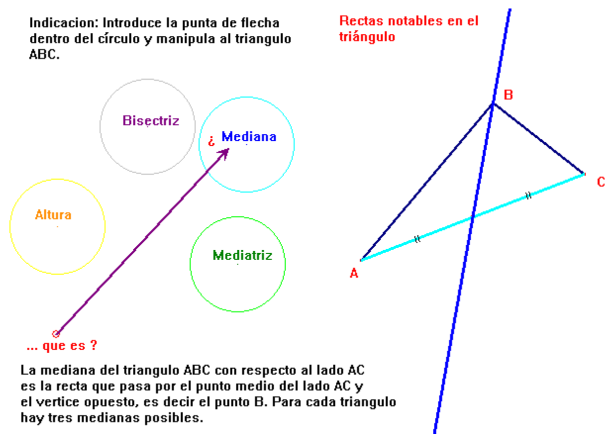
a) Un calendario con cubos. Cabri como un entorno para el ensayo y error.



La actividad consiste en que el estudiante desplace las letras y los dígitos que ya aparecen en el área de trabajo. El problema se enuncia como sigue:
Se desea construir un calendario con 5 cubos, cuyas caras mostrarán letras y dígitos que corresponden a las fechas. Tres cubos se dedicarán a las letras en minúsculas del mes (escrito en inglés) y los dos restantes para los dígitos de la fecha. Rotular las caras de los cubos para cubrir todas las fechas.

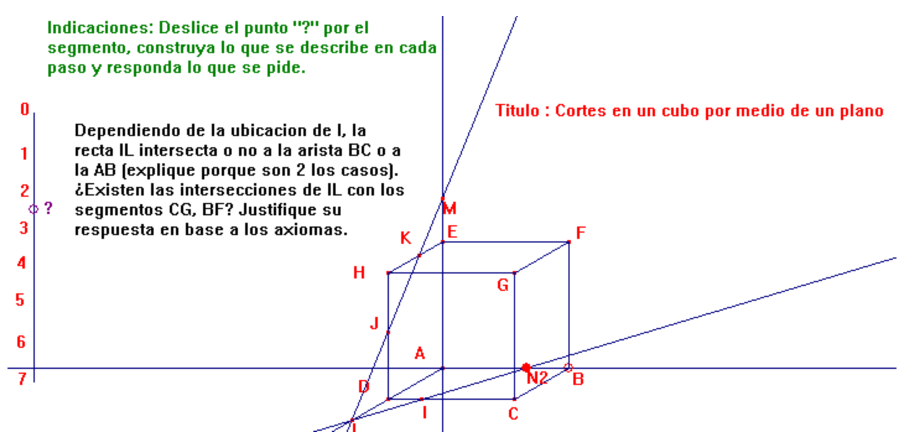
b) Rectas notables del triángulo

La actividad consiste en manipular puntas de flecha de un vector para que, al introducirlas en las circunferencias correspondientes, aparezcan las explicaciones y las rectas notables en el triángulo construido de antemano. El propósito es la comparación de dichas rectas mientras se efectúa la manipulación de los vértices del triángulo.



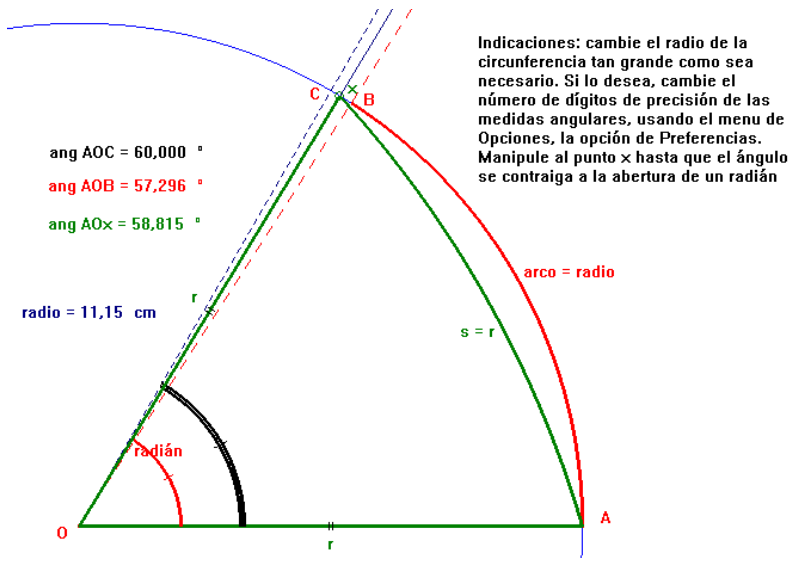
c) Cortes en el cubo

El interés de la siguiente actividad radica en dar la explicación de cómo ha de obtenerse el perfil del polígono de corte en un cubo conocidos tres puntos de corte en sus aristas. El tema de la Geometría del Espacio reviste un gran interés en nuestro medio; el manejo de las representaciones más comunes de las 3 dimensiones puede inscribirse tanto a la necesidad escolar de reproducir un dibujo, como al conocimiento de las propiedades de la geometría del espacio más elementales como a la descripción de todos los casos particulares de un problema.



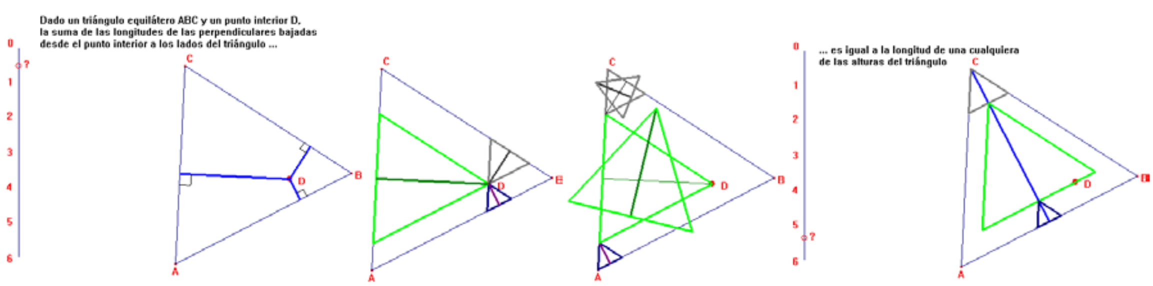
d) Triángulos equiláteros y radianes

La actividad se enfoca a deformar un triángulo equilátero hasta que uno de sus ángulos se convierte en un radián. Pretende reforzar la idea de que dicha medida es independiente de la circunferencia considerada en su definición y, al mismo tiempo, que el estudiante observe la cercanía entre el triángulo equilátero y el sector central correspondiente a un radián. La medida de los ángulos correspondientes podría ser realizada por los estudiantes al momento de manipular el archivo.



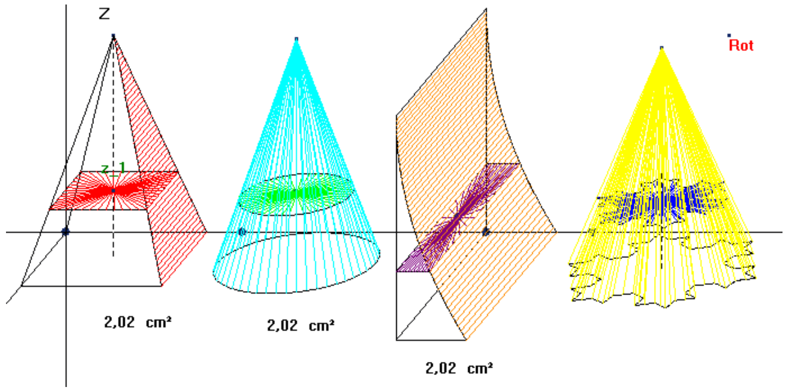
e) Demostraciones visuales con dinámica

Dentro de la argumentación en matemáticas las pruebas visuales fueron empleadas con la idea de que el diagrama daba cuenta de una idea profunda, que debía ser evocada inmediatamente por aquel que observara atentamente el dibujo. ¿Qué ideas son más familiares para el estudiante, cómo justifica de modo innato sus razonamientos? El recurso que se presenta trata de proporcionar herramientas para generar investigación educativa en este sentido.



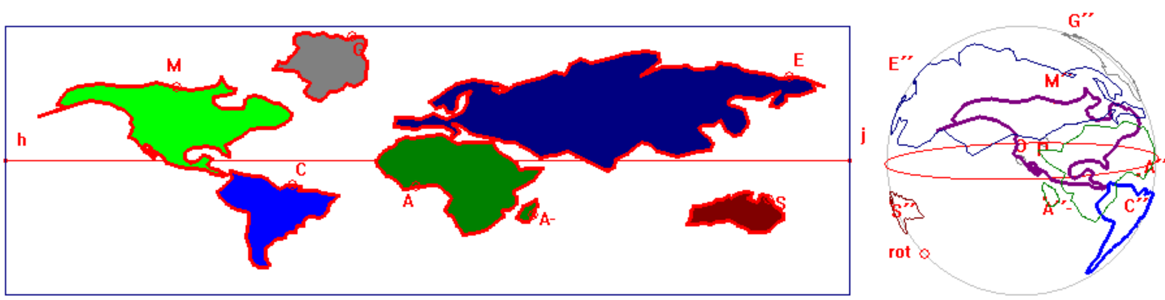
f) Principio de Cavalieri y conservación del volumen

La propiedad descubierta por Cavalieri da origen a temas profundos que están en el corazón mismo del Cálculo Integral. La invarianza del volumen respecto a la forma si se preservan las áreas de las secciones transversales es una idea que ciertos investigadores han pensado pertinente abordar previo al estudio del Cálculo por sus profundas raíces geométricas.



g) Proyección de Mercator, Cartografía y Geografía

Aunque tratemos temas de matemáticas, la gran aplicabilidad de ellos a diferentes contextos ayudan a responder preguntas escolares frecuentes. En esta lección se trata de explicitar el método de Mercator para cartografiar la Tierra, la pregunta central es ¿cómo se hace un mapa? Un conocimiento general de la Geografía también tiene una entrada aquí con preguntas como: ¿está bien situado el ecuador de la Tierra?, ¿donde ubicamos a Cuba o a Inglaterra?, etc. Y preguntas de corte matemático del tipo: ¿cómo trazar en el plano la curva que genera en la esfera la trayectoria más corta entre Saltillo y Grenoble?, ¿cómo encontrar en el plano la región que en la esfera es diametralmente opuesta a la República Mexicana?



Conclusiones

Sobre los trabajos de investigación reportados en este documento, observamos que las temáticas son muy diversas, aunque el núcleo de ellas tiene una fuerte base geométrica, recurriendo con frecuencia a problemas no currículares para indagar el estado actual de la problemática educativa del país. De modo natural, la investigación se abrirá a nuevos temas, nuevos enfoques, nuevos diseños experimentales.

Tocante a las posibilidades de la interfase Cabri queda de manifiesto que cuenta con una gran versatilidad y al mismo tiempo, pone a prueba la fortaleza del diseño experimental planeado en diferentes experimentaciones educativas: ¿qué se debe elegir para que sea controlado por el estudiante?, ¿cómo ha de contestar el estudiante: trazando, calculando o escribiendo en sus palabras aquello que concluye?, ¿qué relación hay entre lo que el diseño permite ver con respecto a las imágenes que el estudiante crea como conceptos o nociones?, ¿cómo plantear una pregunta al estudiante cuando este se apoya visualmente en la dinámica de Cabri?

Además un espacio de investigación muy interesante se abre al enfocarnos al trabajo colaborativo mientras se realiza una cabri-construcción: los estudiantes pueden sugerir ideas o trabajar paralelamente enfocando los problemas con su propio estilo constructivo, resolviendo problemas constructivos con su propia inventiva. Este hecho reserva una fuente importante de datos para los investigadores: ¿qué ideas constructivas son las más populares y conocidas por los estudiantes?, ¿cómo comunican las ideas constructivas los estudiantes?, ¿bajo que condiciones surge un argumento asociado a una idea constructiva realizada en el ámbito del trabajo colaborativo?

Bibliografía

Aguirre, M. (2004). Procesos de visualización en Geometría a través de Transformaciones apoyados con Cabri-Géomètre. Documento predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Benítez, D. (2001). El desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático en ambientes de resolución de problemas. Documento predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Cerón, J. G. (2003). Aditamentos tecnológicos en la Educación, los conceptos de derivada e integral desde un punto de vista geométrico: hacia un curso con Cabri-Géomètre. Tesis de licenciatura en Física y Matemáticas. Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN.

Díaz Barriga, E. (2002). Transparencia y Opacidad de una noción matemática: Objeto geométrico mediado por el entorno computacional Cabri-Géomètre, el caso del principio de Cavalieri. Tesis de doctorado en Matemática Educativa. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Nieves, A. (2003). Diseño y prueba de una metodología de trabajo para caracterizar las situaciones de cambio en los problemas, esencialmente geométricos, de aplicación de máximos y mínimos. Documento predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Ríos, M. (2004). Problemas de Optimización a través de un software de geometría dinámica como una experiencia previa al cálculo. Tesis de maestría en Matemática Educativa. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Sandoval, I. (2004). Estrategias argumentativas en la solución de problemas geométricos: el razonamiento dinámico. Documento predoctoral. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Video Conferencias

Utilización y aplicación de propiedades geométricas en entornos de problemas

Ricardo Barroso Campos

Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Sevilla.

Resumen

En este documento ponemos de manifiesto la importancia que representa la utilización de propiedades geométricas en la resolución de problemas.

Distinguimos teóricamente la mera utilización de una propiedad y la aplicación de la misma en un determinado problema, que puede ser correcta o incorrecta si no se tienen en cuenta todos los requisitos requeridos.

Mostramos lo que puede ser considerado como entorno próximo o alejado de una propiedad geométrica en un determinado problema.

Utilizaremos en nuestro análisis la teoría de van Hiele.

Abstract:

In this document we show the importance that represents the use of geometric properties in the resolution of problems.

We theoretically distinguished the mere use of a property and the application of the same one in a certain problem, that can be correct or incorrect if all the requirements for their application do not consider.

We showed what can be considered like next or moved away surroundings of a geometric property in a certain problem.

Will use in our analysis the van Hiele theory.

Introducción

La utilización de una propiedad y la aplicación correcta de la misma es una consideración que hay que tener presente en el marco teórico de de la comprensión de las propiedades geométricas.

Una propiedad geométrica se comprende cuando

se utiliza, es decir, *simplemente* se implica en el razonamiento deductivo que se esté realizando, y

se aplica de manera correcta, teniendo en cuenta todos los requisitos necesarios para ello.

Para van Hiele (1985), en Matemáticas y más específicamente en Geometría, se pueden discernir cinco niveles pensamiento:

Primero: visual

Segundo: descriptivo

Tercero: teórico, con relaciones lógicas, y geométricas generadas de acuerdo con Euclides.

Cuarto: lógio-formal.

Quinto: establecido por la naturaleza de las leyes lógicas.

Tendremos en cuanta ambos marcos para este documento.

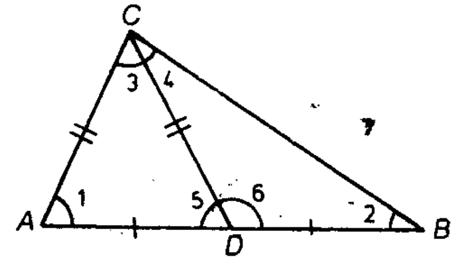
Primer análisis

En Sánchez (1983), el autor hace una utilización de una propiedad que es correcta.

A lados iguales se oponen ángulos iguales.

1. Establezca los ángulos iguales en la figura que se muestra:

Ejemplo 1



Solución:

De acuerdo a la figura

$\overline{AC} = \overline{CD}$

Por lo que:	$\angle 1 = \angle 5$	**Ya que a lados iguales se oponen ángulos iguales.**
y	$\overline{AD} = \overline{DB}$	**Por datos de la figura.**
Por lo que	$\angle 3 = \angle 4$	**Por ser ángulos opuestos a lados iguales**

Respuesta: **los ángulos iguales son** $\angle 1 = \angle 5$ **y** $\angle 3 = \angle 4$

(Reproducido con autorización de Editorial Playor)

La utilización está "bien aplicada" en el caso de los ángulos 1 y 5, y "mal aplicada" en el caso de los ángulos 3 y 4.

Consideramos que un exceso en la presumible generalización lleva a este autor a no tener en cuenta el "entorno" en el que la propiedad debe aplicarse.

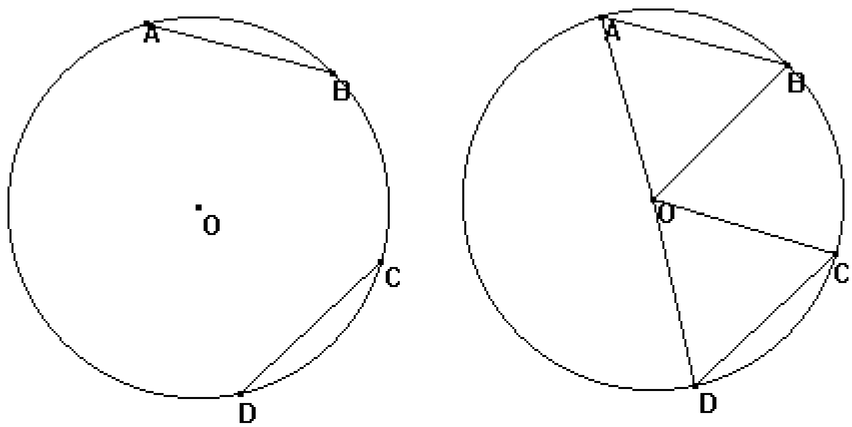
Analicemos detenidamente la propiedad.

A lados iguales se oponen ángulos iguales.

¿Cuál es el fundamento geométrico de la misma?

Consideramos que una primera base teórica para su estudio es la circunferencia.

Sea una circunferencia de centro O, y sean las cuerdas AB y CD de igual longitud.



Los triángulos AOB y COD tienen todos sus lados homólogos de igual longitud, dos radios cada uno de ellos, OA, OB y OC, OD, respectivamente, y el tercer lado AB y CD iguales por construcción.

Por tanto, son congruentes, y los ángulos AOB y COD son iguales, cqd.

Por tanto, en este entorno primario y anexo a la propiedad, es decir, el entorno del que surge, ésta se enunciaría de la siguiente manera:

En una circunferencia, si tenemos dos cuerdas de la misma longitud, los correspondientes ángulos centrales abarcados son iguales.

Una vez demostrada, la propiedad amplía su entorno de aplicación hacia los triángulos, en lo que podríamos denominar un entorno secundario, y con una cierta *distancia* de la propiedad.

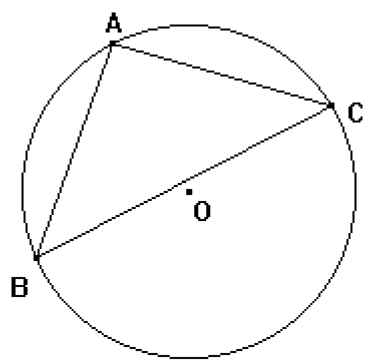
En un triángulo, a lados iguales, se oponen ángulos iguales.

Esta propiedad, con la referencia expresa a su aplicación en triángulos, se demuestra de la siguiente manera:

Sea ABC un triángulo. Sean AB=AC. Los ángulos opuestos a dichos lados, C y B, coinciden.

Sea pues, ABC un triángulo.

Tracemos la circunferencia circunscrita.



Evidentemente, si BA=AC, debido al entorno primario de la propiedad referida a cuerdas sobre la circunferencia, es:

AOB=AOC, y dado que los ángulos C y B miden la mitad del ángulo central, C=B, cqd.

Un entorno alejado de la propiedad se puede observar en el Teorema de Blanchet

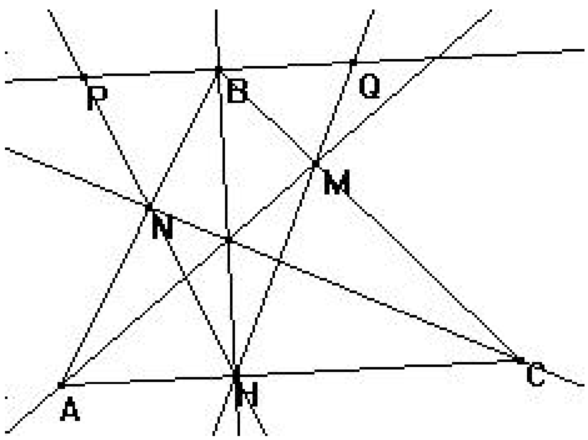
71.- Teorema de Blanchet.

En todo triángulo ABC de altura BH, al trazar las cevianas AM y CN concurrentes con BH, se establece que la altura será bisectriz del ángulo MHN (Frère Gabriel-Marie,1912)

Según Miranda (2003), la solución se plantea así: Veamos la siguiente figura y los trazos adecuados que hay que efectuar y que la demostración indica:

Por B trazamos una paralela a AC tal que corta a las prolongaciones de HN y HM en los puntos P y Q, respectivamente.

Luego HB es perpendicular a PQ.



Como AM, BH y CN son concurrentes, apliquemos el Teorema de Ceva:

(AN)(BM)(CH)= (NB) (MC) (HA),

Pero el triángulo PBN es semejante al AHN, por lo que
(AN) (PB)=(NB)(AH)

Además, BQM es semejante a HMC , y (BM)(HC) =(BQ)(MC) .

Multiplicando estas igualdades, se obtiene que:

AN PB BM HC = NB AH BQ MC

Simplificando PB = BQ, y, en consecuencia, PHQ es isósceles y

los ángulos NHB y MHB son iguales, c.q.d.

En esta ocasión, la propiedad se aplica en un entorno alejado.

En el enunciado del teorema, no se encuentra ninguna alusión a la propiedad, que es utilizada por Miranda para demostrarlo, después de haber utilizado el Teorema de Ceva.

Evidentemente, la propiedad a *lados iguales se oponen ángulos iguales* en el caso analizado, es correcta por su implicación en una situación geométrica desplazada de su sentido original circular, y en un sentido geométrico implicado en un triángulo isósceles (HPQ) generado en el desarrollo del razonamiento geométrico.

Analicemos la utilización de la propiedad en el ejercicio resuelto por Sánchez (1983)

A)El entorno de aplicación de la propiedad es correcto en el "caso" de los ángulos 1 y 5, ya que los considera en el mismo triángulo ADC, siendo AC=CD, es utilizada y aplicada correctamente.

B) El entorno de aplicación de la propiedad es incorrecto en el "caso" de los ángulos 3 y 4, ya que AD= DB, "pero"

1.- No son cuerdas de circunferencia

2.- No son lados de triángulo

Por ello, la aplicación es incorrecta, y el resultado, falso.

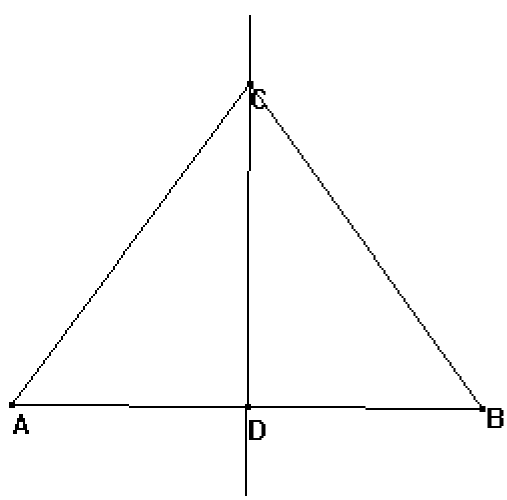
Podemos preguntarnos, si Sánchez tendría razón en esta segunda utilización en algún caso.

La respuesta es que sí.

Si en la situación geométrica C fuese tal que
CD $\perp$ AB, y
AD=DB,
sin ser AC=DC,

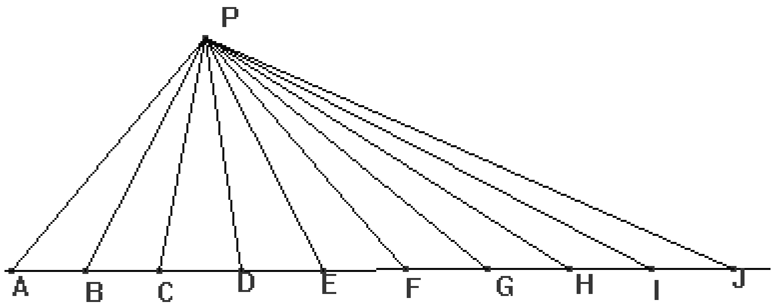
"sí sería" aplicable, pero mediante otras consideraciones, relativas a los triángulos ADC y CDB. Ambos serían congruentes, por ser rectángulos y tener sus catetos iguales.

Claro es que en este caso, no sería más que una aplicación "correcta inconsciente" y que su veracidad, como hemos visto, no se basa en la propiedad aplicada sino en consideraciones acerca de las propiedades de los triángulos, siendo de esta manera un entorno muy alejado de la propiedad.



Respecto a los niveles de van Hiele, se encontraría en lo que algunos investigadores han encontrado que sería nivel pre-visual (Senk, 1989)

Consideramos que ello es debido a que si simplemente, el autor hubiera “visto” la siguiente situación geométrica:



Habría “visualizado” que, aunque AB=BC=... IJ, claramente no son iguales los ángulos APB, ... IPJ.

Evidentemente, el nivel 1 consideramos que no lo alcanza para esta situación geométrica.

Respecto del nivel 2, descriptivo, podemos decir que “salvando” el error, posiblemente este cercano a él.

El nivel 3, teórico, es evidente que tampoco lo alcanza, por las implicaciones geométricas puestas de manifiesto.

Segundo análisis

En Palencia y González (1982), se tiene:

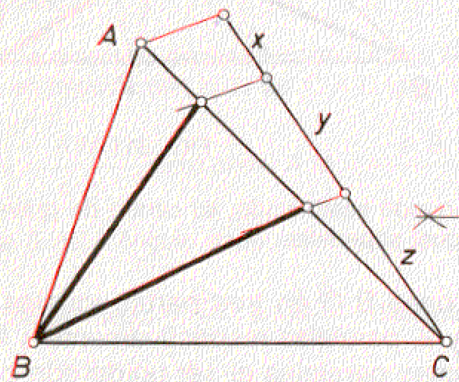


FIG. 314

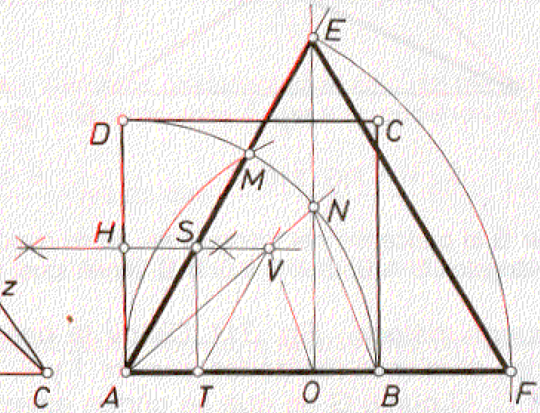


FIG. 315

Recuérdese que para realizar la división de un segmento en partes proporcionales a varias magnitudes dadas se ha de trazar una semirecta por uno de sus extremos en cualquier dirección, transportando sobre la misma consecutivamente las magnitudes dadas y trazando paralelas por los puntos de unión al segmento que une sus extremos finales, según se realizó en la fig. 92.

Las áreas de los triángulos resultantes son proporcionales a sus bases (x, y, z...) al tener todos igual altura.

Construir un triángulo equilátero, equivalente a un cuadrado dado. Fig. 315.

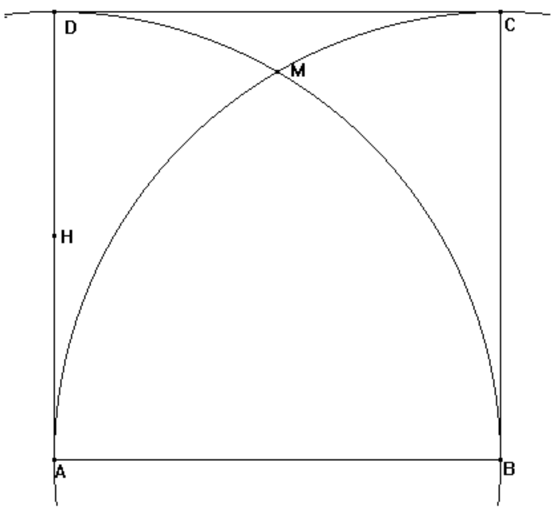
Trazar dos arcos de radio igual al lado del cuadrado con centros en los extremos de su lado base A B, cuya intersección nos determina el punto M. Unir A con M, prolongando dicho segmento. Por H, punto medio del lado A D trazar una paralela a A B la cual determina sobre A M el punto S y por este punto bajar una perpendicular S T a A B, trazando por T una paralela a A M hasta cortar en V a la recta H S. Unir A con V y prolongar hasta cortar en N al arco D B trazado con centro en el vértice A. La perpendicular trazada a A B por N corta en el punto E a la prolongación de A M, siendo A E el lado del triángulo equilátero equivalente al cuadrado dado, el cual se transportará hasta F con centro en el vértice A.

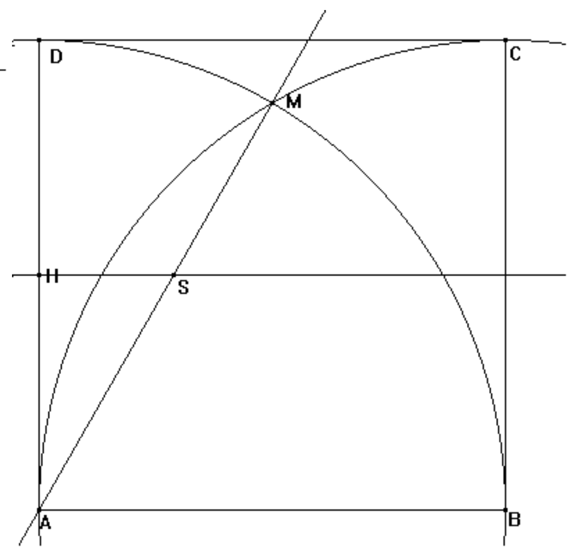
Por proporcionalidad entre los triángulos A V O y A N B podemos escribir $\frac{AO}{AH} = \frac{AB}{ON}$, de donde A O x O N = A H x A B y multiplicando miembro a miembro por 2 O N x A O = 2 A H x A B, o lo que es igual $OE \times \frac{AF}{2} = AB^2$ como queríamos demostrar, toda vez que $\frac{OE \times AF}{2}$ es el área del triángulo A F E y A B² el área del cuadrado.

(Reproducidas con permiso de los editores)

Analicemos detenidamente la construcción efectuada.

Tomemos una referencia ortonormal de centro A y unidad AB.



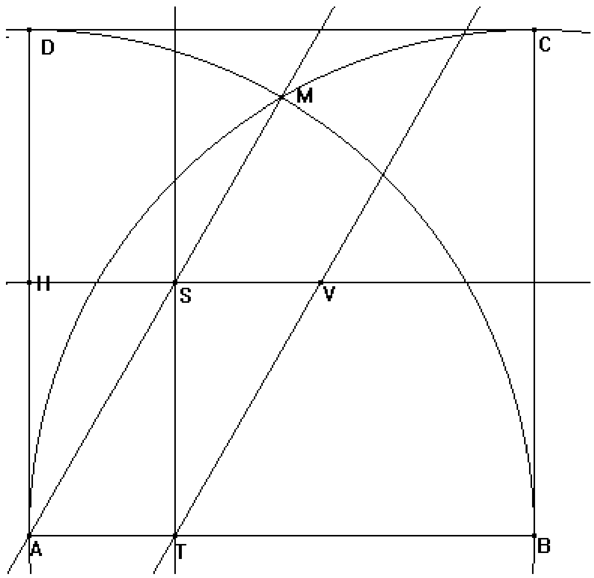


Es A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1), por ser ABCD cuadrado.

Por la construcción hecha, es H(0,1/2), y

La recta AM tiene de ecuación $y = \sqrt{3}\,x$,

luego el punto S tiene de coordenadas $S(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2})$



El punto T por tanto, será $T(\frac{\sqrt{3}}{6},0)$.

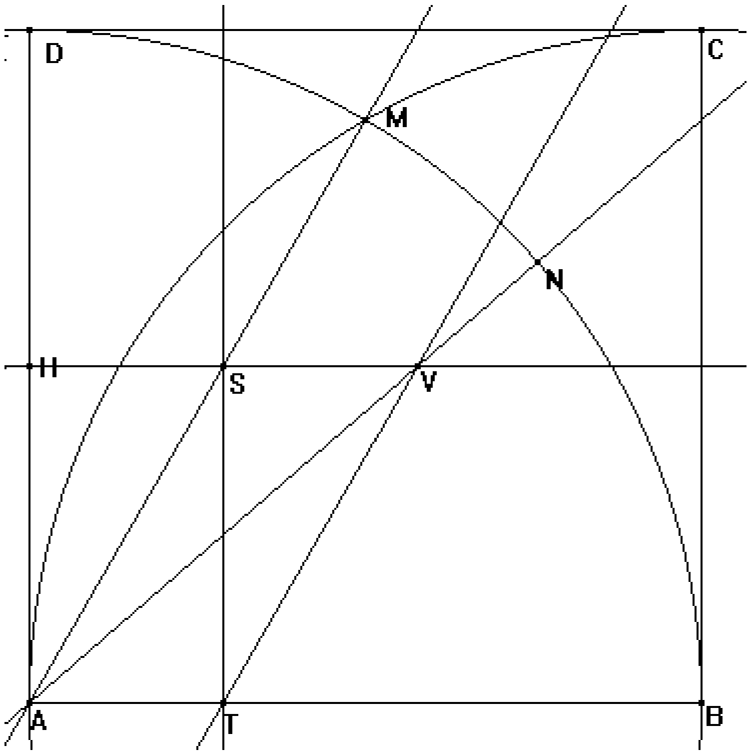
Tomando TV paralela a AM, la ecuación de la recta TV es:

$$y=\sqrt{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{6})=\sqrt{3}x-\frac{1}{2},$$

Por lo que el punto V es: $\frac{1}{2}=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}\ \rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \rightarrow V(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})$

La recta AV tendrá de ecuación:

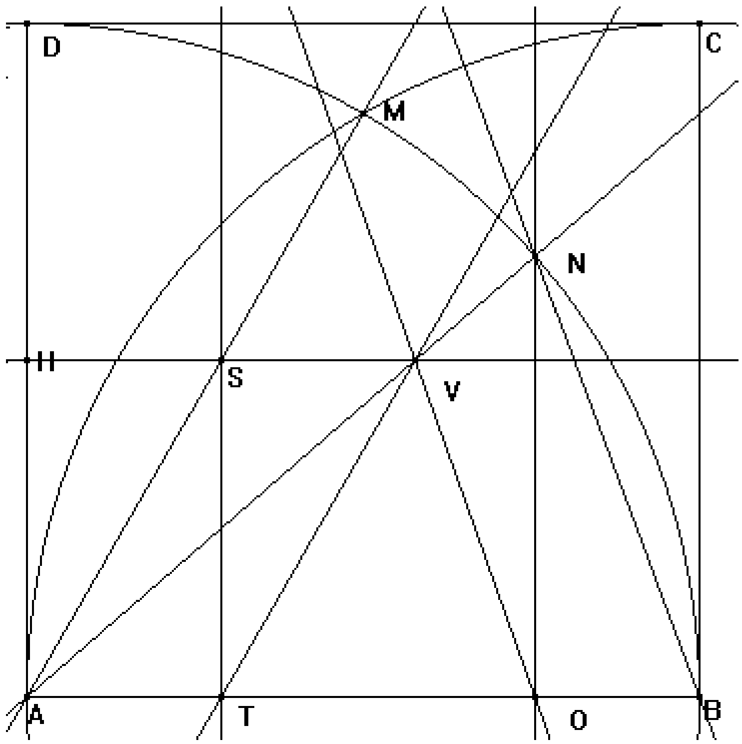
$$y-\frac{1}{2}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/3}(x-\frac{\sqrt{3}}{3})\ \rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{6}(x-\frac{\sqrt{3}}{3})\ \rightarrow\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\,x$$



La intersección de la recta AV con la circunferencia de centro A y radio AB es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x \\ y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{4}x^2 + x^2 - 1 = 0 \rightarrow \frac{7}{4}x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{7}} = \pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Tomando, lógicamente, el valor positivo, será, $N(\frac{2\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$



Así, tenemos que el punto O es: $O(\frac{2\sqrt{7}}{7},0)$.

Busquemos las pendientes m y n de OV y BN.

$$\begin{cases} OV:((\frac{2\sqrt{7}}{7},0),(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2})) \\ BN:((1,0),(\frac{2\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{21}}{7})) \end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\dfrac{1}{2} - 0}{\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2\sqrt{7}}{7}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{7\sqrt{3} - 6\sqrt{7}}{21}} = \dfrac{21}{14\sqrt{3} - 12\sqrt{7}} \\ n = \dfrac{\dfrac{\sqrt{21}}{7} - 0}{\dfrac{2\sqrt{7}}{7} - 1} = \dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7} - 7} = \dfrac{21}{14\sqrt{3} - 7\sqrt{21}} \end{cases}$$

Evidentemente, no tienen la misma pendiente.

Siendo los valores: -2.799886353, y -2.68222577, con

un error absoluto de 0.11663776, y

error relativo de 0.043485437,

y con los ángulos respectivos de una medidas sexagesimales de:

-70º 20' 43''

-69º 33' 11''.

Con lo que el error absoluto respecto a los ángulos es aproximadamente de 47'.

El área del triángulo obtenido finalmente es de 99,1734687894 cm²

Para el cuadrado de área 100,2012005786 cm²,

Siendo el error absoluto de 1,0277317892, y

El error relativo de 0,0102566

Luego al no ser OV paralelo a BN, no puede aplicarse correctamente la propiedad de ser AVO y ANB triángulos semejantes, puesto que no cumplen los requisitos.

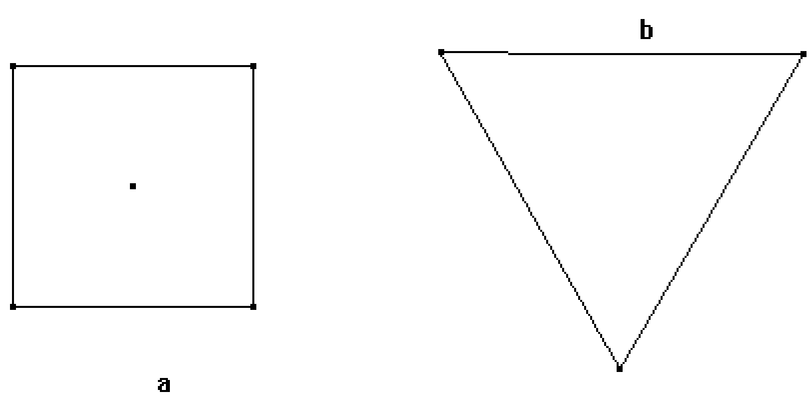
Así, pues, todo lo posterior, como hemos comprobado, es incorrecto.

¿Qué ha podido ocurrir en este caso?

Los autores, quizá basándose en apreciaciones visuales, han entendido que un "paralelismo" aproximado era suficiente.

En este caso, pues, se utiliza una propiedad correcta, la proporcionalidad de los lados en triángulos semejantes, en un entorno "alejado" de la propiedad incorrecto, pues se aplica a triángulos que no lo son.

Quedaría por analizar cuál es la construcción correcta.



Sea a el lado del cuadrado y b el del triángulo equilátero.

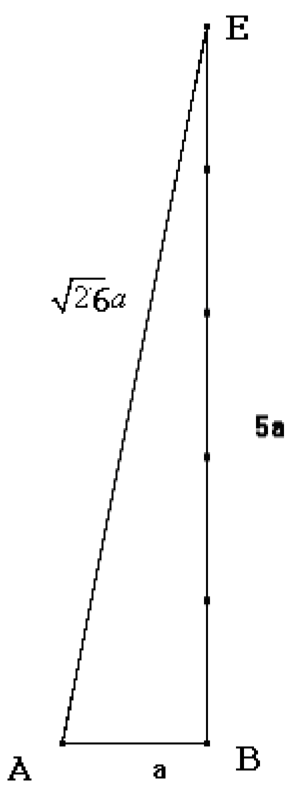
Area del cuadrado, a^2 , área del triángulo, $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

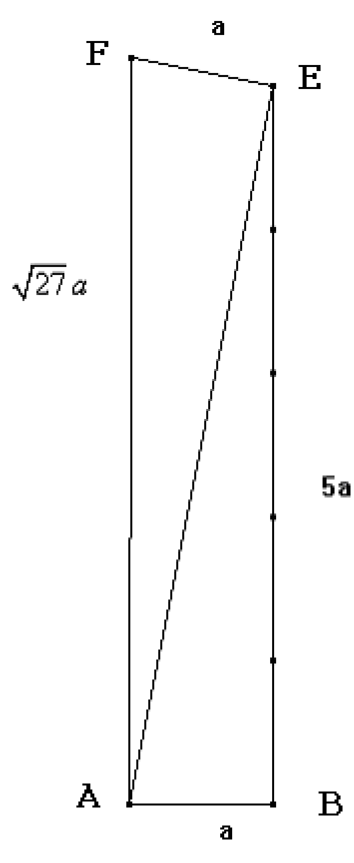
Luego ha de ser:

$$b^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3} \rightarrow b = \frac{2\sqrt[4]{3}\,a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\,a}{3} = \frac{2\sqrt[4]{27}\,a}{3}$$

Hemos de construir dicho valor a partir de a.

En primer lugar, construyamos $\sqrt{27}\,a$. Es: 27=26+1=25+1+1, luego por Pitágoras, siendo AB=a, BE=5a, BE $\perp$ AB, es AE = $\sqrt{26}\,a$, y reiterando el proceso, tomando EF=a, FE $\perp$ AE tenemos AF= $\sqrt{27}\,a$.





Ahora hay que obtener el segmento de longitud $\sqrt[4]{27}\,a$

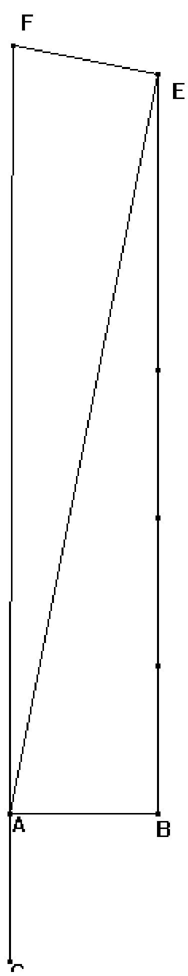
Si

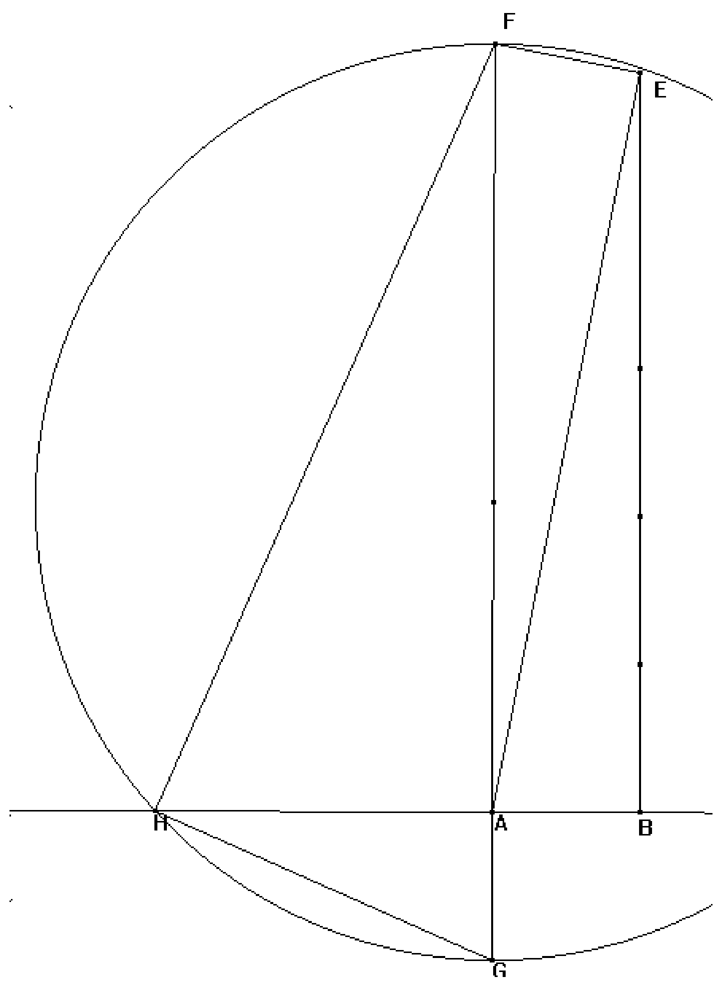
1.- al segmento FA correspondiente a $\sqrt{27}\,a$ le añadimos un segmento de longitud a, AG

2.- trazamos la circunferencia cuyo diámetro sea el último segmento obtenido FG

3.- trazamos la perpendicular por A al diámetro FG.

4.- el segmento tomado en la perpendicular cuyos extremos son AH, es $\sqrt[4]{27}\,a$.





El motivo es la proporción entre los lados de los correspondientes triángulos rectángulos semejantes, AHF y AGH de los que sus catetos son , respectivamente, AH y $\sqrt{27}\,a$ para el “mayor”, y a y AH para el menor, por lo que:

.

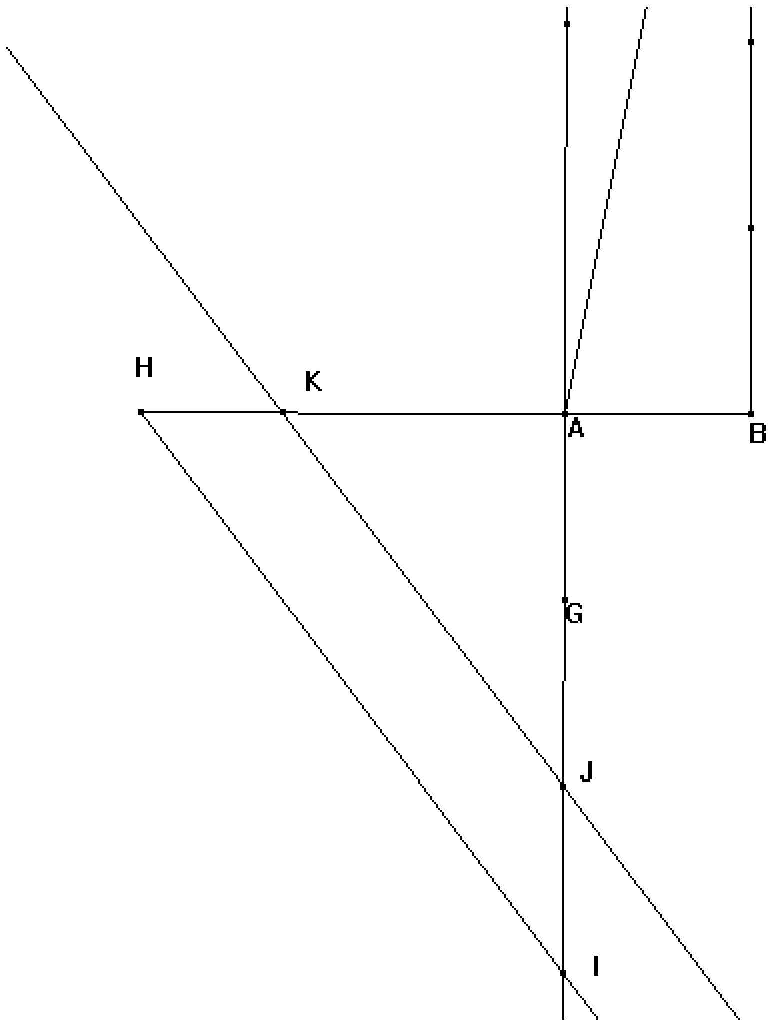
$$\frac{AH}{\sqrt{27}a} = \frac{a}{AH} \rightarrow AH^2 = \sqrt{27}a^2 \rightarrow AH = \sqrt[4]{27}a$$

De ello se deduce que el lado del triángulo será 2/3 de AH.

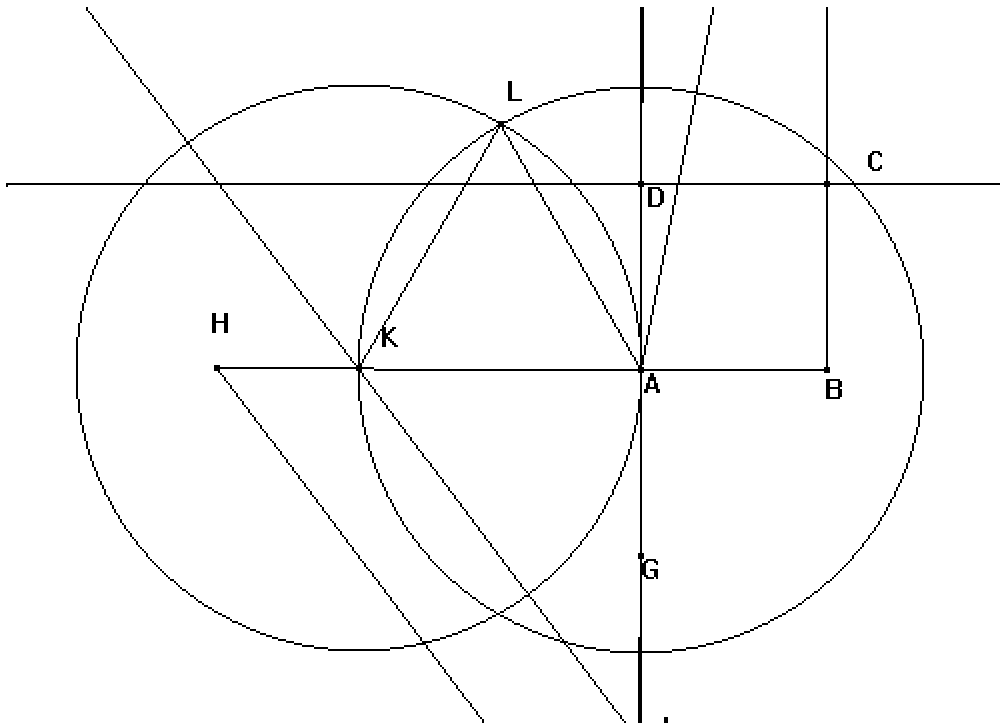
Tomemos, por ejemplo, AI=3 AG, y AJ=2AG.

Trazando la recta IH, y por J una paralela a ella, obtendremos K tal que

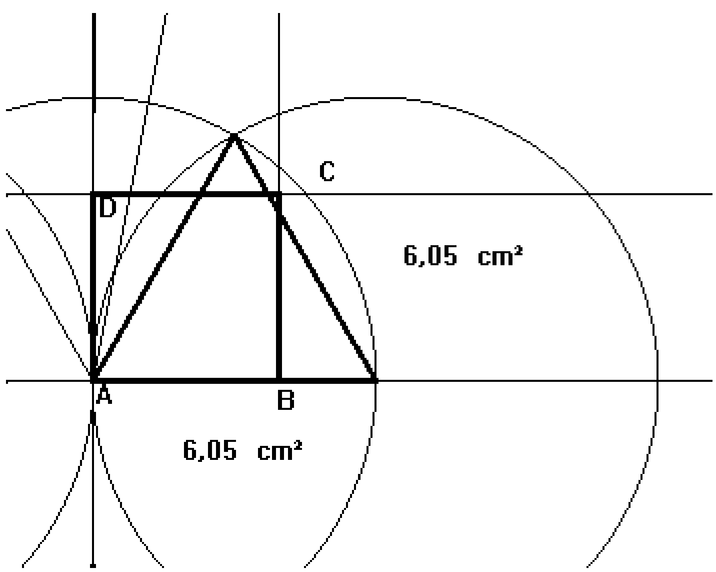
$$AK = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}a\ .$$



Así pues, el triángulo equilátero de lado b=AK, AKL y el cuadrado ABCD tienen el mismo área.



Llevando AK sobre la recta AB, nos da el siguiente resultado:



Cabri nos da el área de ambas figuras, que, como era de esperar, coinciden.

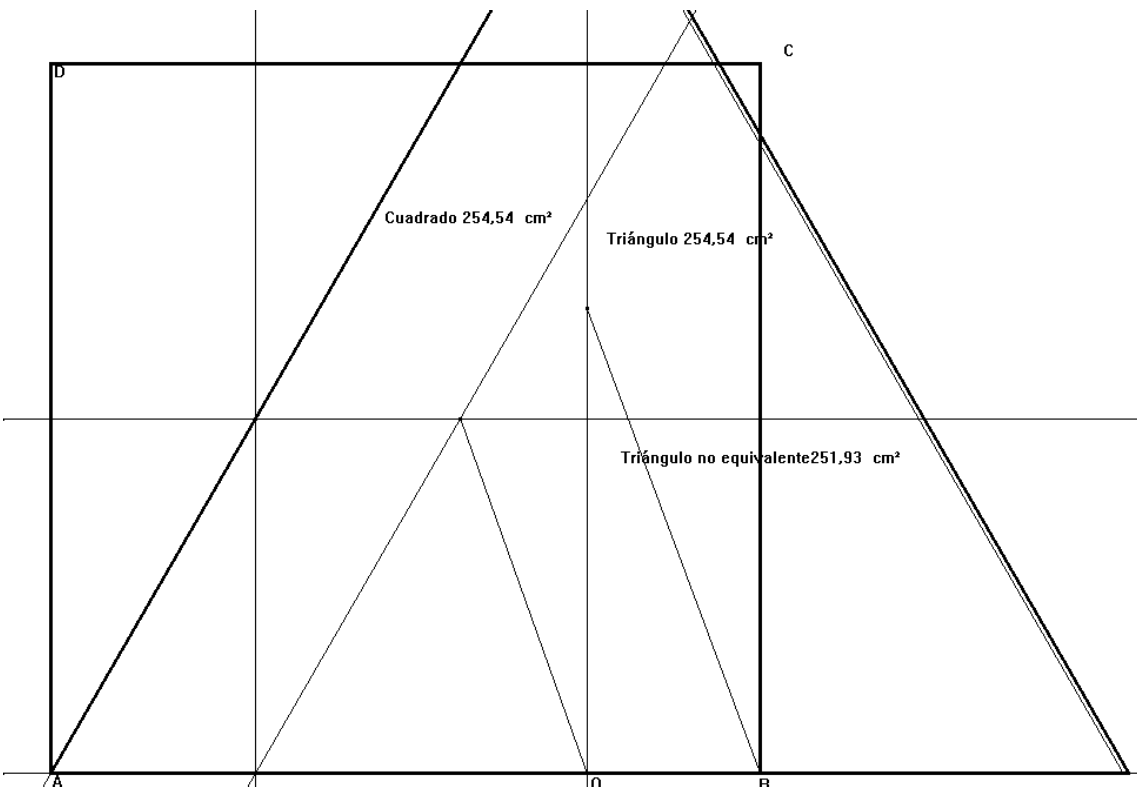
Este problema es el inverso al siguiente (Cortázar, 1884)

Reducir un triángulo a cuadrado equivalente.

Es una interesante relación entre el cálculo elemental de raíces, fracciones,… etc y la geometría euclídea, con la participación del teorema de Pitágoras dos veces, la media geométrica una vez y la proporcionalidad de segmentos.

La construcción realizada geométricamente no tiene nada que ver con la del libro de trazado geométrico.

Al comparar ambas construcciones, hay que ampliar la construcción para observar diferencias apreciables:



En esta ocasión, el área del triángulo erróneo es de 251.93, frente a 254.54, con un error absoluto de 2.61 y relativo de 0.01029

Según la teoría de van Hiele, entendemos que estos autores están muy cercanos al nivel visual, puesto que su error es relativamente muy pequeño.

Respecto al nivel descriptivo, la relación de estructuras geométricas hecha para establecer la solución del problema propuesto es errónea, por lo que tampoco se alcanza el mismo.

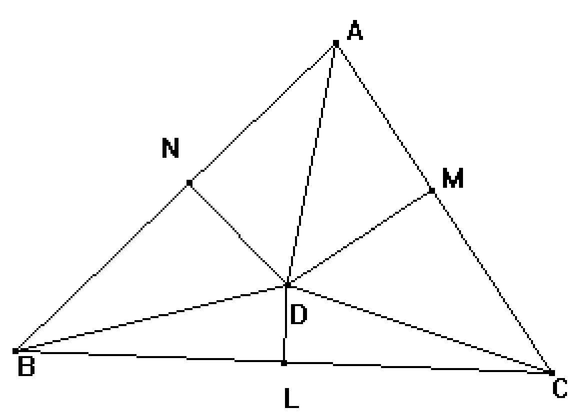
En relación al nivel teórico, hemos de decir, a tenor del análisis geométrico efectuado, que no se alcanza, puesto que las relaciones euclideas puestas en juego son erróneas.

Tercer análisis:

En ocasiones, la utilización de una propiedad y su aplicación incorrecta se hace de manera explícita para buscar algunas relaciones geométricas falsas.

Así, en la Unidad 17 (1971), se tiene:

Considérese la siguiente prueba euclídea:



Sea ABC un triángulo.

Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D.

Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB respectivamente.

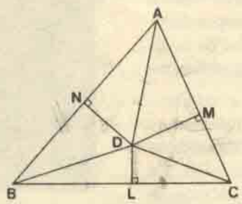
Únase D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

Nos referimos ahora al fundador de otra escuela del pensamiento. DAVID HILBERT, 1862-1943, consideró que el intento de basar la matemática completamente en la lógica era demasiado ambicioso. Su enfoque se dirigió a romper los problemas en partes y enfrentarse a ellos fragmentariamente. Inicialmente, la cuestión de la verdad y la falsedad, que siempre había causado dificultades filosóficas, se dejó a un lado y se concentró el esfuerzo sobre la *consistencia* y la *completez* de conjuntos de axiomas. En este contexto la consistencia implica que en cualquier sistema no se pueden probar un resultado y su contradicción. La completez significa que se han dado suficientes axiomas de modo que los resultados que (en algún sentido) deben ser deducibles, pueden deducirse realmente.

Uno de los primeros logros de Hilbert fue formular un conjunto completo de axiomas de la geometría euclídea. Considérese la siguiente prueba euclídea:

Sea ABC un triángulo:



Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D. Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB, respectivamente. Unase D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como $BL = LC$, DL es común y $B\hat{L}D = C\hat{L}D = 90°$, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Entonces $BD = CD$. Como los ángulos $N\hat{A}D$, $M\hat{A}D$ son iguales y $A\hat{N}D = A\hat{M}D = 90°$ y AD es común, los triángulos AND, AMD son congruentes y por tanto $DN = DM$ y $AN = AM$.

Como $DN = DM$, $BD = DC$ y $B\hat{N}D = C\hat{M}D = 90°$, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto $NB = MC$.

Puesto que

$$AN = AM \text{ y } NB = MC,$$

se sigue que

$$AB = AC$$

De modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente todo triángulo es isósceles.

Esto, claramente, no tiene sentido, aunque la prueba se sigue de los axiomas de Euclides para la geometría. La dificultad radica en que los *axiomas de Euclides son incompletos* y necesitan ser suplementados por axiomas de incidencia mediante los cuales se establezca que, cuando se trazan líneas de cierta manera, ellas se intersectan en una cierta parte del plano. (La manera como trazamos la figura presume y después afirma que D está situado dentro del triángulo, lo que es una hipótesis injustificada.)

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

Puesto que AN=AM, y NB=MC, se sigue que

AB=AC, de modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente, todo triángulo es isósceles.

Esto, claramente, no tiene sentido, aunque la prueba se sigue de los axiomas de Euclides para la geometría. La dificultad radica en que los axiomas de Euclides son incompletos y necesitan ser suplementados por axiomas de incidencia mediante los cuales se establezca que, cuando se trazan líneas de cierta manera, ellas se intersecan en una cierta parte del plano. (La manera como trazamos la figura presume y después afirma que D está situado dentro del triángulo, lo que es una hipótesis injustificada).

Hagamos un análisis.

Ante todo, el perpendicular bisector es la mediatriz; el traductor, Bernardo Alfonso, de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, hace una traducción "palabra a palabra" del inglés.

La bisectriz de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto en el triángulo se cortan en un punto, en efecto, con las siguientes precisiones:

1.- Si el triángulo es isósceles, y se trata del ángulo desigual, ambas rectas coinciden.

2.- Por tanto, si el triángulo es equilátero, coinciden.

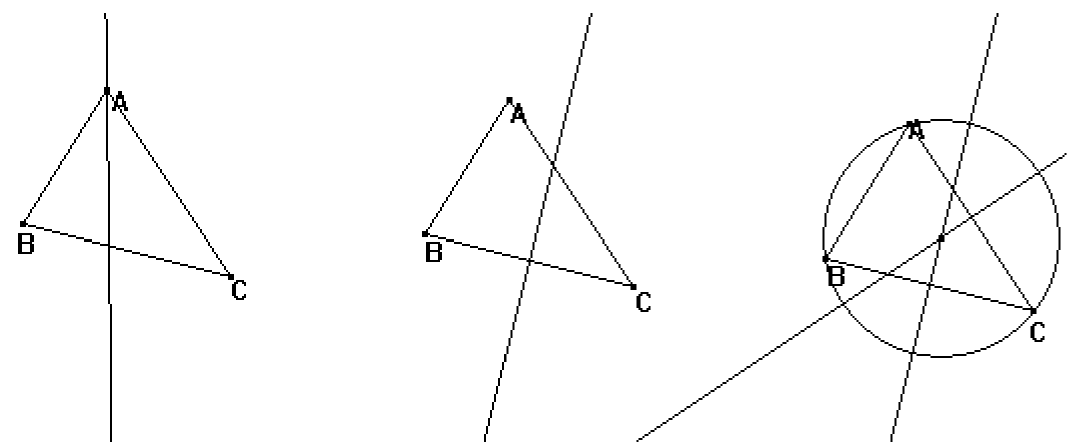
3.- Si el triángulo es escaleno, se cortan sobre la circunferencia circunscrita. En Iglesias (2001) se presenta el siguiente problema

4.- Demostrar que en un la bisectriz interna de un ángulo y la mediatriz del lado opuesto se cortan sobre la circunferencia circunscrita

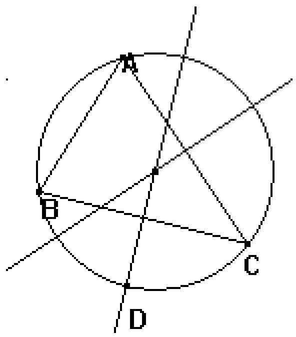
Analicémoslo:

Sea ABC un triángulo genérico (sin ninguna regularidad). Tracemos la bisectriz del ángulo A y la mediatriz de BC.

Tracemos la circunferencia circunscrita.

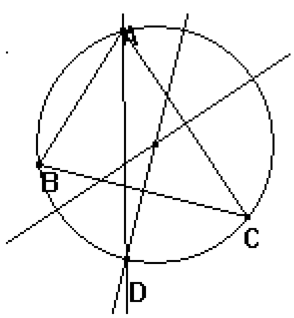


La mediatriz de BC lo corta perpendicularmente en su punto medio, por lo que corta al arco BC en su punto medio.



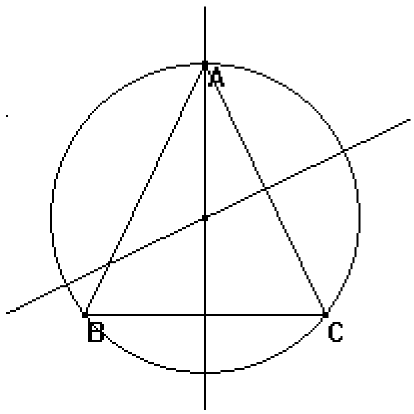
Así, pues, los arcos BD y DC son de igual medida central, y por ello, los ángulos BAD y DAC miden igual.

Es decir, que AD es la bisectriz del ángulo BAC, y cqd, la mediatriz de un lado de un triángulo y la bisectriz del ángulo opuesto se cortan en un punto D sobre la circunferencia circunscrita.



He aquí que la presunción, la hipótesis inicial de estar D situado en el interior del triángulo, para los escalenos tomados según la definición exclusiva: Triángulo con tres lados desiguales dos a dos, ya que la inclusiva es: Triángulo con los tres lados desiguales, no es correcta.

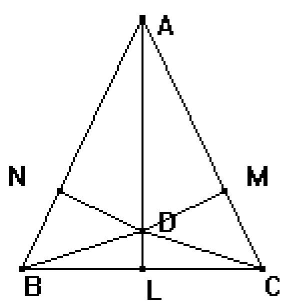
Si el triángulo es isósceles tomado según la definición exclusiva: Triángulo con dos lados iguales y el tercero desigual, ya que la inclusiva es: Triángulo con dos lados iguales, y A es el ángulo formado por los dos lados iguales, la bisectriz y la mediatriz opuesta coinciden.



Lógicamente, si es equilátero (los tres lados iguales; en este caso no cabe distinguir definiciones exclusivas/inclusivas), también coinciden, las tres bisectrices con las tres mediatrices, en este caso.

Comencemos el análisis a partir del caso del triángulo isósceles en su definición exclusiva.

Tomemos un punto interior como D.



Tomemos, según el texto analizado, DM perpendicular a AC, DN perpendicular a AB.

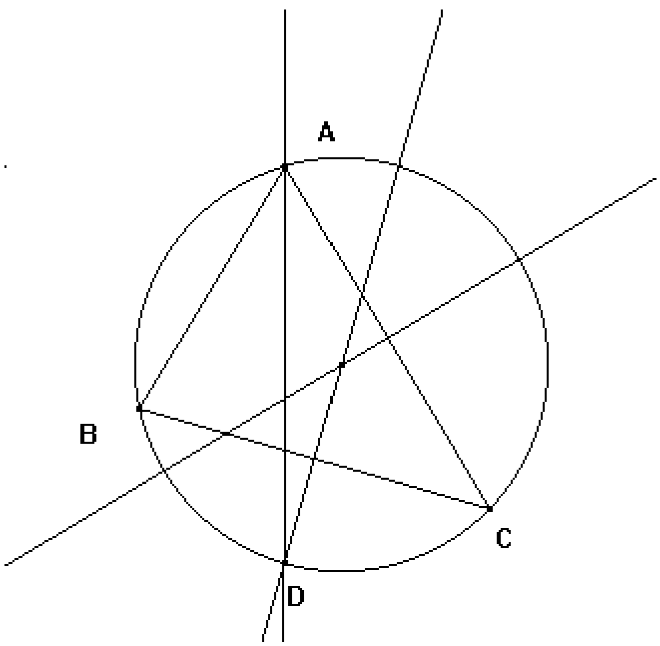
Unimos D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

Puesto que AN=AM, y NB=MC, se sigue que AB=AC, de modo que el triángulo es isósceles. Conclusión lógica, puesto que inicialmente lo era.

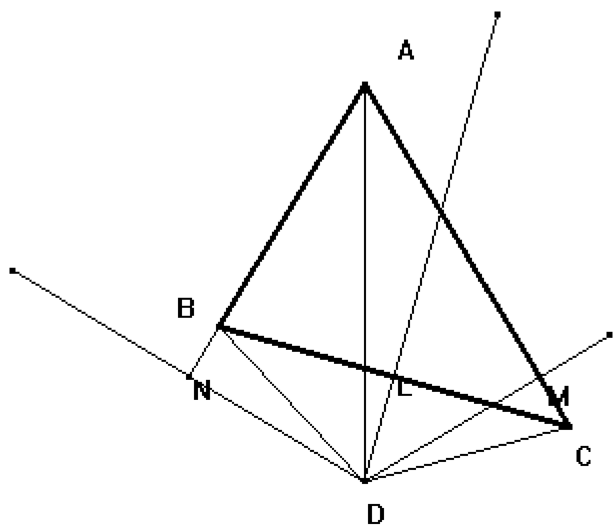
Así, pues, tomemos ABC, triángulo escaleno según la definición exclusiva.



Considérese la bisectriz del ángulo A y el bisector perpendicular de BC, los cuales se encuentran en un punto D.

Trácense perpendiculares DM, DN sobre AC, AB respectivamente.

Se une D con C y D con B. Sea L el punto medio de BC. Como BL=LC, DL es común, y BLD=CLD=90º, los triángulos BLD y CLD son congruentes. Luego BD=CD.



Todas estas conclusiones parciales son correctas.

Como los ángulos NAD y MAD son iguales, y AND=AMD=90º, y AD es común, los triángulos AND y AMD son congruentes, y por tanto, DN=DM y AN=AM.

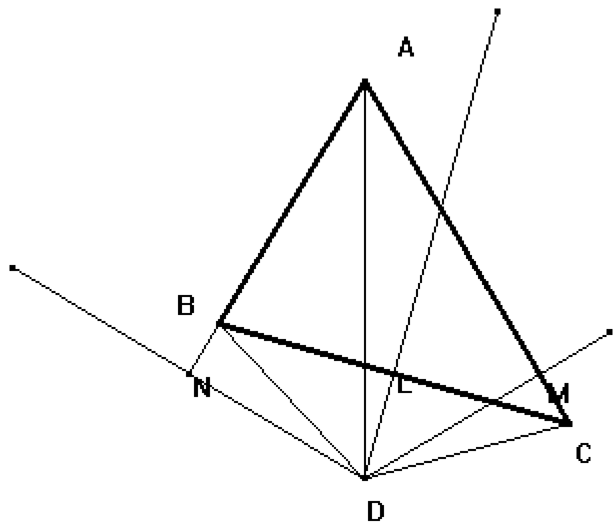
Continúan hasta aquí siendo ciertas las conlcusiones para un triángulo escaleno exclusivo.

Como DN=DM, DB=DC y BND=CMD=90º, los triángulos BND y CMD son congruentes y por tanto, NB=MC.

También es cierto, aunque en este caso, las medidas han de tomarse en valor absoluto.

Puesto que AN=AM, y NB=NC, se sigue que AB=AC, de modo que un triángulo arbitrario es isósceles; por consiguiente, todo triángulo es isósceles.

Esta conclusión es falsa, puesto que aquí es necesario tomar signos, y lo que es cierto es que:



AB= AN-BN y AC=AM+MC, y, lógicamente, para el caso que nos ocupa,
Es: AB = AN-BN = AM-MC = AC-2MC < AC, luego no es isósceles para AB y AC. Igual sería para BC y BA.

O sea, que, en efecto, como señalan los autores (no vienen referenciados en el libro, sólo aparece el traductor), hay una hipótesis injustificada en el desarrollo de la demostración.

Más que injustificada, precisaríamos que es una hipótesis falsa para todo triángulo salvo los isósceles y equiláteros.

No deja de sorprender que partiendo de un solo elemento falso, puesto que todo el desarrollo posterior es correcto, se pueda llegar a una conclusión errónea.

Desde la teoría de van Hiele, el papel del nivel 1 tiene una preponderancia vital en el desarrollo de toda la demostración efectuada. Dado que la visualización es incorrecta por tener un único elemento (el punto de corte analizado) falso, los restantes niveles descriptivo y teórico a pesar de su coherencia interna, son erróneos en el desarrollo completo.

Conclusiones

Una propiedad geométrica debe ser utilizada y aplicada teniendo en cuenta todos los requisitos geométricos que intervienen.

La falta o la consideración errónea de alguno de tales requisitos puede ser motivo de conclusiones falsas, como se ha puesto de manifiesto en el documento.

Las conclusiones didácticas para una buena gestión de la enseñanza de las propiedades geométricas son de suma importancia, debido a que dependiendo de la etapa de enseñanza en que se desarrolle (Preescolar, Primaria, Secundaria, Bachillerato, Universidad), el profesor ha de tener en consideración los entornos de aplicación de la propiedad cuando la explique por *primera vez*, para que los alumnos no obtengan una visión falsa de la subsiguiente aplicación.

Los niveles de van Hiele se muestran eficientes para analizar y estructurar el pensamiento geométrico que surge a lo largo de un razonamiento.

Aunque un razonamiento geométrico adquiera visos de verosimilitud y coherencia interna en un determinado entorno de una propiedad, si un solo elemento no es correcto, puede llevar a conclusiones falsas.

Bibliografía

Cortázar, (1884) Tratado de Geometría Elemental. (pág 96)

Frère Gabriel-Marie (1912) Exercices de Géométrie (p. 471-472)

González, M. y Palencia, J. (1982): Trazado geométrico. Sevilla.

Iglesias (2001): http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri/problema32.htm

Miranda, J (2003): http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol71ju

Sánchez (1983): Geometría [Geometría sin esfuerzo], Editorial Playor, Círculo de Lectores,
Senk, S. (1989): Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. Journal for Research in Mathematics Education (vol.20 (3), pp.309-321)
Unidad 17(1971): Lógica II. Prueba, (Curso Básico de Matemáticas). Open University, McGraw-Hill.
Van Hiele (1985): Structure and Insight. A theory of mathematics education. Academics Press Inc. Orlando.

GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL ESPACIO

François Pluvinage con contribución de Nicole Vogel, colegas y estudiantes del lycée de Haguenau

Problemas de representación, descripción y razonamiento en el caso de la geometría del espacio de dimensión 3, con el uso de softwares dinámicos: Presentación de actividades diseñadas para principiantes en geometría 3D y entrevista con unos alumnos (~ 17 años) de un «lycée» francés.

1. ¿El espacio como plano-tiempo?

Los desplazamientos constituyen una característica esencial de los softwares de trazados geométricos con respecto al dibujo en una hoja de papel. En la geometría del plano están bien conocidos en particular su papel heurístico y su papel para comprobar la validez de construcciones. En la geometría del espacio de dimensión tres proporcionan la tercera dimensión que falta en las representaciones planas estáticas.

En forma condensada podemos asertar que el espacio geométrico de dimensión tres está presente cuando la dimensión del tiempo se añade a las dos dimensiones de un plano. Se sabe que la percepción tridimensional viene por parte de la visión binocular, pero sobre todo de cambios que producen pequeños movimientos del observador. Esta importancia fisiológica de la variable tiempo, que no se podía fácilmente explotar antes de las computadoras, se combina con una importancia científica. En la parte medular de teorías como la relatividad está el tiempo. Se puede suponer que un estudiante acostumbrado a la visión del espacio geométrico de dimensión tres como un plano-tiempo tendrá acceso facilitado a los conceptos del espacio-tiempo. La historia nos enseña que la pura visión del cielo se presenta diferente cuando uno piensa que su observatorio se mueve y cambia otra vez cuando se sabe que los objetos vistos no son simultáneos.

En el sitio web de Nicole Vogel http://perso.wanadoo.fr/nvogel/ se pueden mover sólidos. Se presentan también enlaces, puesto que hoy se encuentran muchos sititos que enseñan poliedros y sólidos. Para mover sólidos utilizan varios softwares.

Por ejemplo, en el sitio de Nicole Vogel se usa Geospace (con ActivX) para girar sólidos, mientras en
<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Polyedres/Platon/Index_Platon.html se utiliza Cabri. Otros softwares sirven para mover sólidos en los sitios web
http://mathworld.wolfram.com/Cube.html
http://mathworld.wolfram.com/topics/ArchimedeanSolids.html
y en
http://www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr
http://www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr/Live3D.htm

Pero la presentación animada de objetos espaciales deja abiertas tres preguntas en la enseñanza.
1) ¿En qué consiste la actividad del estudiante y qué son los problemas a resolver? Si es cierto que los autores de una presentación animada se apoyaron en un conocimiento profundo de la geometría, el papel otorgado al espectador queda poco activo y poco problemático.
2) ¿Hay adecuación entre el mundo virtual aparente y la “realidad” representada? Las representaciones planas, bajo varios sistemas de proyecciones, son múltiples y más o menos realistas. Hasta la distancia del observador a una pantalla tiene importancia en la visión espacial de la figura.
3) ¿Cuáles son las habilidades esperadas como resultado de la enseñanza, las tareas que se deben cumplir? Unos hablarán aquí del contrato didáctico. Una prueba de examen se apoya hoy en producciones escritas o dibujadas, y el papel posible de una ayuda semejante a la que la calculadora proporciona en álgebra o cálculo no es evidente.
Por eso no se limitan unos sitios web en presentaciones animadas, sino contienen elementos relativos a la representación plana de sólidos. Es en particular el caso del sitio de Nicole Vogel, donde se usa Cabri para eso. Sin embargo, elementos precisos de respuesta a las preguntas anteriores suponen un estudio didáctico, con la participación de estudiantes.

2. Unas consideraciones didácticas

Los actuales programas escolares, en particular franceses, otorgan a una parte de la geometría de dimensión tres un sitio de dominio específico, como son cálculo, geometría plana o estadísticas y probabilidades, e incorporan otras partes en otros dominios como el de los vectores. La parte estudiada como específica es precisamente la que introduce los objetos de la geometría afín de dimensión tres (planos además de puntos y rectas) y que relaciona los objetos espaciales y sus representaciones planas. Se extiende el estudio del espacio del nivel exploratorio, con el recurso de objetos reales (papel plegado por ejemplo), antes de los lycées, a un primer acercamiento en el primer año general de los lycées, y de estudios más profundos en los dos años siguientes, especializados, hasta el bachillerato.
Aquí nos limitamos en considerar la situación en el primer año especializado (estudiantes de ~17 años) de la sección científica. La parte específica de geometría del espacio es titulada “secciones planas”, y los objetos a considerar son cubos y tetraedros. En las modalidades didácticas, se dice que los estudiantes pueden ayudarse con manipulaciones de sólidos y uso de un software de geometría. Y los complementarios se refieren a las reglas de incidencia vistas el año anterior. Otros tópicos de geometría de dimensión tres están en un párrafo sobre sistemas de coordenadas y en la parte de geometría vectorial (incluso baricentros). En consecuencia podemos esperar de nuestros estudiantes que como prerrequisito, sepan resolver un problema de construcción del tipo siguiente.

<u>Problema 1.</u> Sea ABCD un tetraedro y M un punto del plano ABC. Construya la paralela al plano BCD que pasa por M y es secante a la recta AD.

Se supone que la resolución de este problema se hace mediante un trazado en el plano (hoja de papel o pantalla) y se puede notar que se hace sin necesitar lo que Hamid Chaachoa, 1998, llama el recurso de reglas de uso. Al contrario, un trazado en el plano para un problema euclidiano, como trazar la perpendicular común a dos rectas del espacio señalado hamid Chaachoua, necesita este recurso. Recordamos la construcción (figura 1): sean *r* y *s* las dos rectas. Por un punto cualquiera *M* de *r* se traza la paralela a *s*, para obtener un plano *p* paralelo a *s*. Se toma otro punto cualquiera *N* de *s* y se traza el proyectado ortogonal *H* de *N* sobre *p*. Las rectas *s* y *HN* determinan un plano que corta a *r* en el punto *A*. Basta trazar por *A* la paralela a *HN* para obtener la perpendicular común *AB* a *r* y *s*.

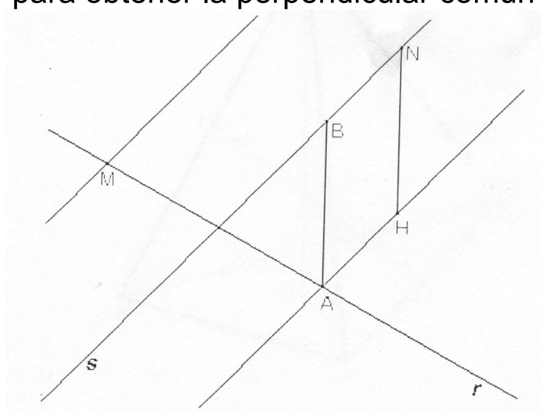


Figura 1

En lo anterior, se ve que la ubicación del punto H en la representación plana resulta de una elección arbitraria, pero que corresponde a un punto bien definido en el espacio. Es eso una regla de uso. Se entiende de inmediato que es una dificultad entender que algo arbitrario en las representaciones planas se autoriza, pero exclusivamente si está vinculado a un trazado bien definido en el espacio.
El origen de muchas dificultades surge del hecho de que ninguna representación plana respeta todas las distancias en el espacio. Y en la historia, una problemática propia de las representaciones ha aparecido relativamente tarde, puesto que su verdadero desarrollo se sitúa a partir del renacimiento. No es sorprendente en consecuencia que en unos experimentos, investigadores como Marie-Paule Rommevaux, 1991, después de Gérard Audibert y Josaine Caron-Pargue, pensaron en diseñar secuencias didácticas de actividades sobre sólidos tridimensionales antes de considerar los problemas específicos de las representaciones planas. Pero la experiencia demuestra que, quizás debido al entorno cotidiano de los estudiantes, es más eficiente desde el inicio manejar en paralelo representaciones planas y objetos tridimensionales. Es lo que la misma Marie-Paulie Rommevaux, 1998, aclara en un artículo posterior. Y la misma elección la hacemos aquí, con el recurso de los softwares geométricos.

3. Metas de trabajo con estudiantes

Ya hemos encontrado un problema típico que pertenece al campo de los prerrequisitos en el nivel de enseñanza que nos interesa. Nos interesa también tener una idea de su pensamiento en cuanto a la indeterminación relativa a lo euclidiano en las representaciones planas del espacio. Podemos pensar en otro problema de construcción o en un problema abierto, como el 3 abajo.

Problema 2. Sea ABCD un tetraedro y M un punto del plano ABC. Construya la perpendicular en M a la recta AD.

Problema 3. Sea ABCD un tetraedro y H el proyectado ortogonal de A sobre al plano BCD (véase la figura 2). ¿Son secantes las rectas AH e IJ, donde I es el punto medio de AB y J el punto medio de CD?

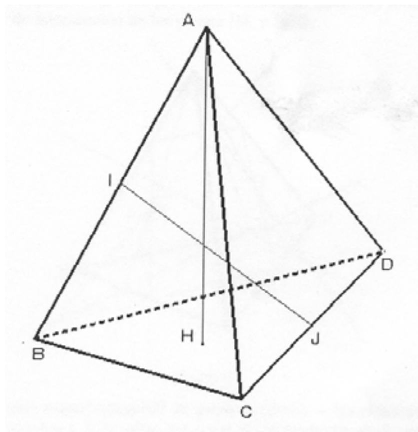


Figura 2

En el transcurso del estudio vale la pena estudiar una figura a plegar, porque aparece como un intermedio entre los objetos Tridimensionales y el registro de las representaciones planas.

Problema 4. Completar con un triángulo la figura 3, que consta de tres triángulos, de tal manera que plegándola se obtenga un tetraedro.

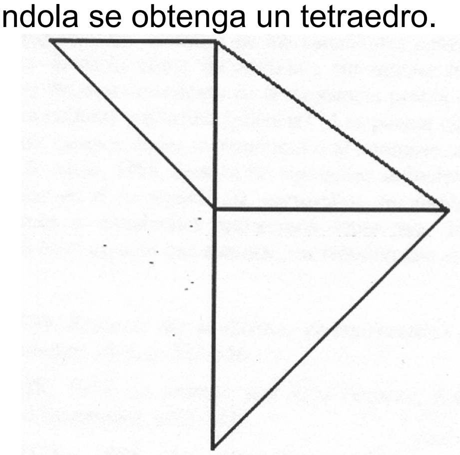


Figura 3

Con respecto a los objetivos finales de los programas curriculares en este nivel, nos parece interesante considerar el caso general de sección plana de un tetraedro que se presenta en el problema siguiente.

Problema 5. En las caras de un tetraedro ABCD se consideran tres puntos: I sobre ACD, J sobre ADB y K sobre ABC. Trazar la sección del tetraedro obtenida por medio del plano IJK.
La figura 4 enseña una respuesta. La idea principal consiste en trazar las rectas AI, AJ y AK, para obtener luego la recta r de intersección de los planos IJK y BCD.

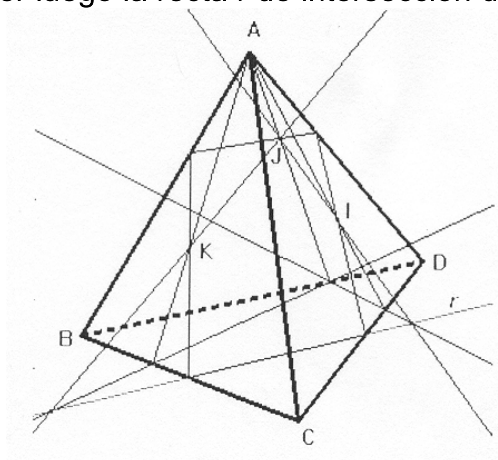


Figura 4

Desde luego, una situación menos compleja se puede proponer a los estudiantes. Por ejemplo, la ubicación de uno de los puntos I, J, K sobre una arista del tetraedro produce una simplificación; por ejemplo si se toma K en AB, la recta JK produce directamente una parte de la respuesta. Notemos que lograr con Cabri un resultado valido para cada posición de I, J y K no es sencillo.
Con un cubo seleccionamos un problema clásico, cuyos resultados obtenidos por estudiantes (pero sin uso de software) son son bastante bien conocidos: se trata del perímetro de una sección plana.
Problema 6. Sea ABCDEFGH un cubo de arista a. Se supone que su diagonal AG está vertical. Se considera un plano horizontal en un punto M de AG. Se pide graficar el perímetro p de la sección del cubo por este plano en función de la distancia x = AM.
Actitudes. También nos importan las actitudes de los estudiantes confrontados a la geometría de dimensión tres. ¿Ven este dominio como un apéndice sin mucho interés en su currículo, un complemento bajo la forma del descubrimiento de la existencia propia de representaciones al lado de los objetos, una apertura cultural y pluridisciplinaria?¿Les parece que las habilidades necesarias son las mismas de los demas campos de las matemáticas o al contrario son específicas? Un artículo de M. Ruffell, J. Mason y B. Allen, 1998, destaca las siguientes actitudes y cualidades individuales: interés (o placer), confianza en si (seguridad), curiosidad, iniciativa, imaginación, fiabilidad, perseverancia. Entrevistando a estudiantes trataremos de tener una idea de cómo reaccionan confrontados a la geometría en el espacio que estudian, en relación con estas características.

Bibliografía

Hamid CHAACHOUA, 1999, Ecologie des problèmes de construction dans l''espace, Recherches en Didactiques des Mathématiques 19-3, p. 323-356.

Marie-Paulie ROMMEVAUX, 1991, Le premier pas dans l'espace, Annales de didactique et de sciences cognitives 4, IREM Strassbourg, p. 85-123.
Marie-Paulie ROMMEVAUX, 1998, Le discernement des plans une situation tridimensionnelle, Annales de didactique et de sciences cognitives 6, IREM Strassbourg, p. 27-65.
M. RUFFELL, J. MASON & B. ALLEN, 1998, Studying Attitude to Mathematics, Educational Studies in Mathematics 35, p. 1-18.

Minicursos

Sobrevolando con Cabri el Aprendizaje del Futuro.

Ana I. Cánepa. aicanepa@hotmail.com

Sandra Calzetti. sancal@sinectis.com.ar

Paula Corti paulacorti@fibertel.com.ar

Alicia Noemí Fayó, aliciafayo@ciudad.com.ar

María Cristina Fayó, mcfayo@ciudad.com.ar

María Teresa Ortiz. -mcortiz@fibertel.com.ar

Mabel Trozzoli. mabeltrozzoli@fibertel.com

Institución: **Grupo de Investigación Matemática XVIII. Cabri ®.República Argentina.**

Objetivos

En América Latina el analfabetismo ha alcanzado niveles preocupantes. Para revertir esta situación con las metodologías tradicionales los gobiernos deberían utilizar excesivos recursos económicos y largos períodos de tiempo. Una forma de abreviar dichos tiempos, realizando la misma inversión de dinero será la educación a través de redes informáticas.

La educación a distancia realzará y fortalecerá el rol de los formadores poniendo énfasis en una actualización permanente de sus conocimientos a través de la capacitación, reflexión, investigación, comunicación y evaluación para el rediseño de las clases, en forma continua.

En este curso se presentará un sitio WEB preparado especialmente para tal fin. En la misma se abordarán diferentes temas de geometría para el aprendizaje, comunicación y visualización de las investigaciones actuales sobre la misma.

Además la interactividad, herramienta indispensable para el aprendizaje significativo de la geometría, comprometerá al visitante a dilucidar los desafíos propuestos.

Desarrollo:

Metodología:

Se trabajará mediante el método Aula – Taller con guías de trabajos prácticos que inducirán a los docentes a investigar en Cabri los temas a desarrollar.

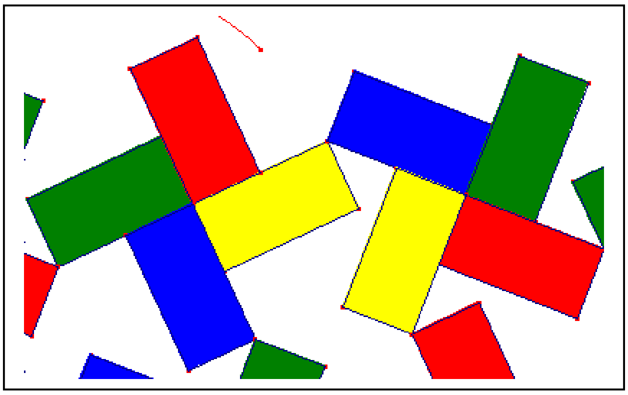
¿A quienes está dirigido?

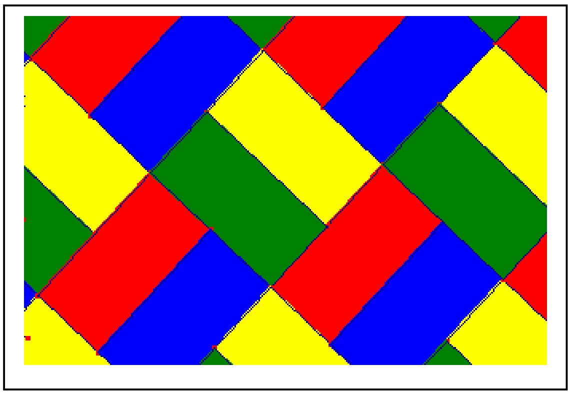
El taller está dirigido para docentes de nivel medio y superior que deseen incorporar el tema del estudio de la Geometría a través del método de Educación a distancia.

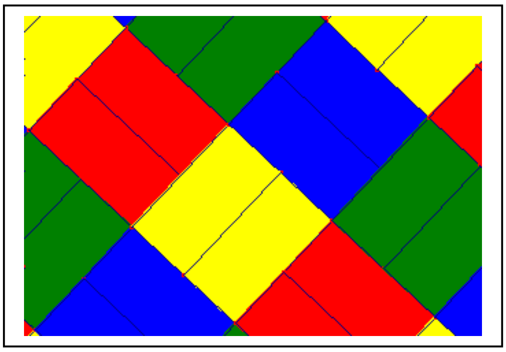
Primer Encuentro:

En primer lugar se dará a conocer el sitio del Grupo de Investigación Matemática XVIII. Cabri®. República Argentina. Los participantes recorrerán el menú y encontrarán distintas opciones: Geometría de Caos y Fractales, Programa de Erlanguen, Geometrías no Euclideanas, Arte y Cabri, Proyectos de Cursos a Distancia.

En segundo lugar se les propondrá realizar una actividad en Cabri para visualizarla en su propia página WEB. Como modelo se les propondrá crear un teselado con animación.







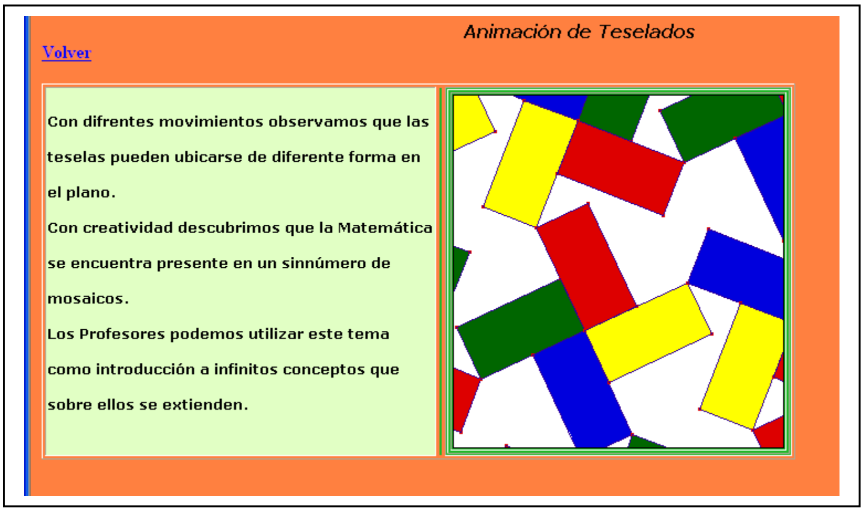
Segundo Encuentro:

Se dará a conocer:

- la estructura de una página WEB en lenguaje HTML.
- Los códigos de Cabri Java que se deben tener en cuenta para la visualización de la animación.
- Ensamblar las dos actividades.
- Visualizar con el navegador la página WEB.

Como segunda actividad, los participantes trabajarán las metodologías que les permitan ser usuarios de cursos a distancia, para ello recorrerán los menúes del sitio que lleva al Curso a Distancia.

Como actividad concreta grabarán en disco una actividad propuesta del curso que trata sobre Polígonos Estrellados, su construcción y propiedades.



Tercer Encuentro:

Observarán un video motivador del tema a desarrollar que se propone como actividad de cierre del Curso a Distancia.

El tema aborda las distintas formas geométricas que se tienen en cuenta para aprovechar la dinámica aérea como el Parapente, los Cometas, Velámenes, etc.

Los docentes construirán superficies que modelicen las expuestas.

<u>Materiales necesarios</u>:

Proyector de películas, proyector multimedial, PC con la configuración para utilizar Cabri II y II Plus, con lectoras de CD. Internet para visualizar del sitio WEB, Pizarra y marcadores.

Bibliografía:

- Mandelbrot, Benoît . *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Ed.Tusquest Editores.1997.
- Mandelbroît, Benoît. *Los objetos fractales: forma,azar y dimensión.* Tusquests.1987.
- Elementos de Matemática. *Conjuntos Fractales.* Vol VI N°23. Marzo 1922.
- Laborde, C. *L' énseignement de la géometrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3.(1990)
- Monographie du CIP .*Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géomètre* .1996
- Pappas,Theoni. *La Magia de la Matemática*. Zugarto Ediciones S.A. España.1996
- Clarou Philippe, Laborde Colette, Capponi Bernard. *Géometrie avec Cabri, scénarios pour le lycée.* CNDP.Collection Objectif MultiMédia.2001.
- Schumann, Heinz. Green,David. *Discovering Geometry with a Computer –using Cabri-Géomètre*. Inglaterra. Ed Chartwell Bratt.1994.
- Feder,J. *Fractals.* Plenum Press. Nueva York.1988
- Guzmán, Miguel. *Aventuras Matemáticas. Una aventura hacia el Caos y otros episodios*. Madrid. Ed Pirámide.1997
- Aguilera, Néstor. *El Jardín de los fractales*. Red Olímpica.1995

II CONGRESO IBEROCABRI
Saltillo, México
2 a 4 de Junio de 2004

Minicurso

Alguna Estadística con Cabri-Géomètre

José Alexandre dos Santos Vaz Martins
(jasvm@ipg.pt)

Escola Superior de Turismo e Telecomunicações (Seia)
Instituto Politécnico da Guarda (www.ipg.pt)
Portugal

Índice General

Índice de Figuras

INTRODUCCIÓN

Se pretende con este minicurso presentar una de las potencialidades de la geometría dinámica, al servicio, no de los problemas geométricos puros, pero sí de la aprehensión de conceptos básicos de Estadística Descriptiva, contribuyendo, así, para la mejoría de la enseñanza de la estadística, que tanto relieve y importancia ha alcanzado a nivel curricular y a nivel social, facilitando el trabajo del profesor mostrando ideas, caminos y formas nuevas de alcanzar esos objetivos.

En ese sentido se presentarán, para que sean implementadas, situaciones creadas con la intención de estimular visualmente y facilitar la adquisición de los conceptos de media aritmética, mediana, moda y el método de los mínimos cuadrados (en el caso de la regresión linear), a través de una interpretación geométrica de los mismos y/o de sus propiedades. También se presentarán aplicaciones con algunos tipos de gráficos para explorarlos y establecer interrelaciones.

ACTIVIDADES A DESARROLLAR

Con las actividades a desarrollar se quiere inducir los docentes a investigar en Cabri los temas propuestos.

El desarrollo de los temas resulta simple y atractivo mediante el enfoque de la geometría dinámica que es posible con un software como Cabri, bastando para eso conocimientos básicos de Cabri.

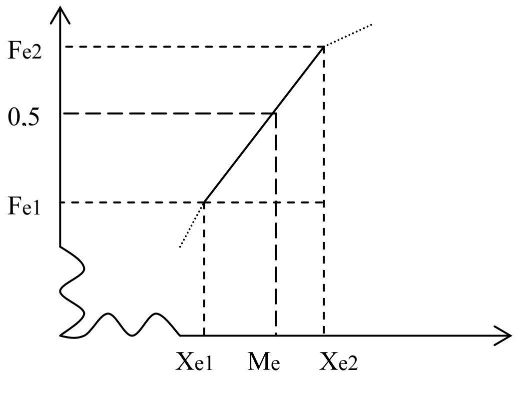
Después de una introducción al tema y de la construcción de las aplicaciones correspondientes, los participantes pueden cambiar las frecuencias y explorar fácilmente sus consecuencias mediante manipulación directa.

Así, en seguida serán tratados los temas referidos y algunas de las actividades a desarrollar en su entorno.

- **Mediana**

La mediana es una medida de localización definida por su posición en la sucesión de las observaciones o en la distribución de frecuencias. Así, en el caso de variables continuas, la mediana es la abcisa (*x*) a que corresponde la ordenada 0,5 (50%) en el gráfico de la función acumulada (polígono integral). De esta forma, está establecido un proceso gráfico-geométrico de obtención del valor (aproximado) de la mediana para el caso referido.

Por otro lado, habiendo sido admitida, en el trazado del polígono integral, la hipótesis de que las frecuencias se distribuyen uniformemente dentro de cada clase, o lo que es lo mismo, que las frecuencias acumuladas tienen una variación linear dentro de cada clase, y utilizando semejanza de triángulos (triángulos con dos lados sobrepuestos), se obtiene la fórmula para el cálculo de la mediana:



$$\boxed{\frac{Me - x_{e1}}{x_{e2} - x_{e1}} = \frac{0.5 - F_{e1}}{F_{e2} - F_{e1}}}$$

$$\boxed{Me = x_{e1} + \frac{F_{e1} - 0.5}{F_{e1} - F_{e2}}\left(x_{e2} - x_{e1}\right)}$$

Finalmente, en el histograma, en que las frecuencias se pueden interpretar como áreas, la mediana se define como el valor de la variable tal que la ordenada levantada en el punto correspondiente del eje de las abcisas (*x*) divide el área del histograma en dos áreas iguales.

Así, se puede crear una aplicación para poder estudiar (visualizando) las relaciones constantes cuando hay triángulos con dos lados sobrepuestos (ver figuras 1 y 2), así como construir un histograma tipo y su respectivo polígono integral (ver figura 3), para después, siguiendo las indicaciones teóricas referidas, poder obtener gráficamente la mediana (ver figura 4) y hacer la constatación gráfica de la fórmula de cálculo de la mediana (ver figura 5).

En la aplicación creada se pueden observar, de forma dinámica, las características referidas, o sea:

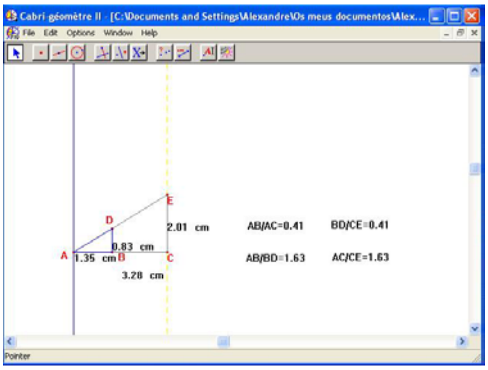


Figura 1: Triángulos con 2 lados sobrepuestos

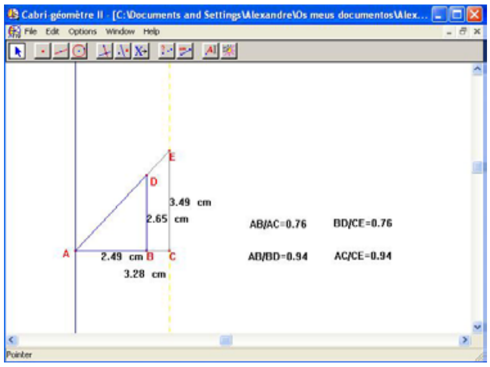


Figura 2: Triángulos con 2 lados sobrepuestos

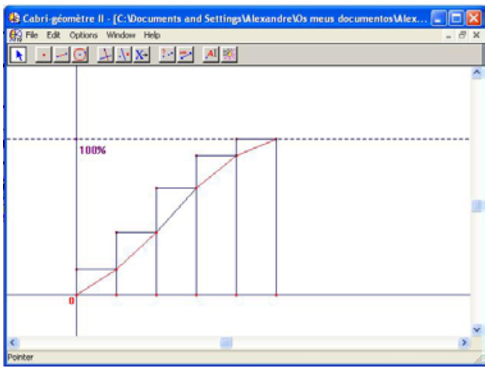


Figura 3: Polígono integral

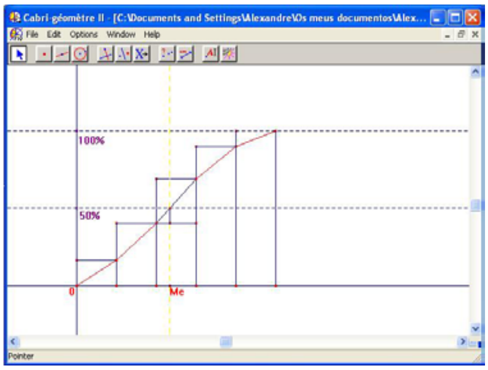


Figura 4: Obtención geométrica de la mediana

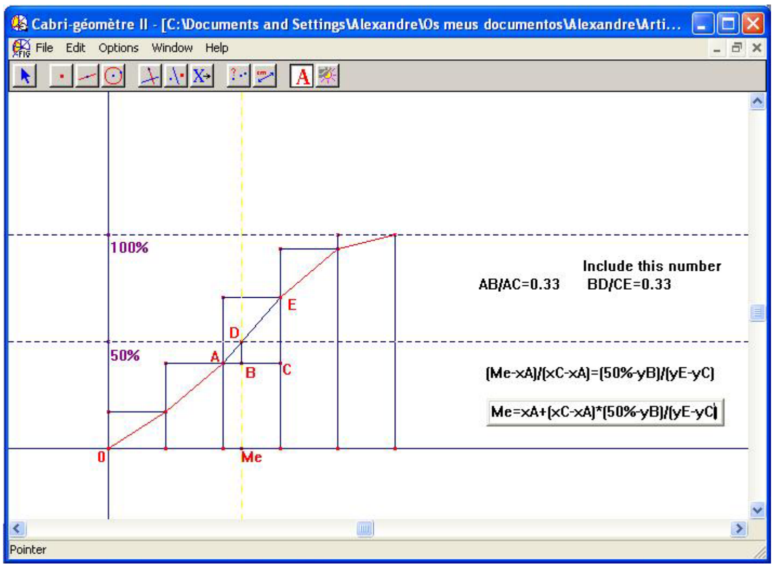


Figura 5: Fórmula de cálculo de la mediana

Además, se puede verificar la igualdad, en el histograma, de las áreas a la izquierda y a la derecha de la mediana, y visualizar la relación entre el gráfico de barras de las frecuencias acumuladas y el histograma, como se puede ver en la figura 6.

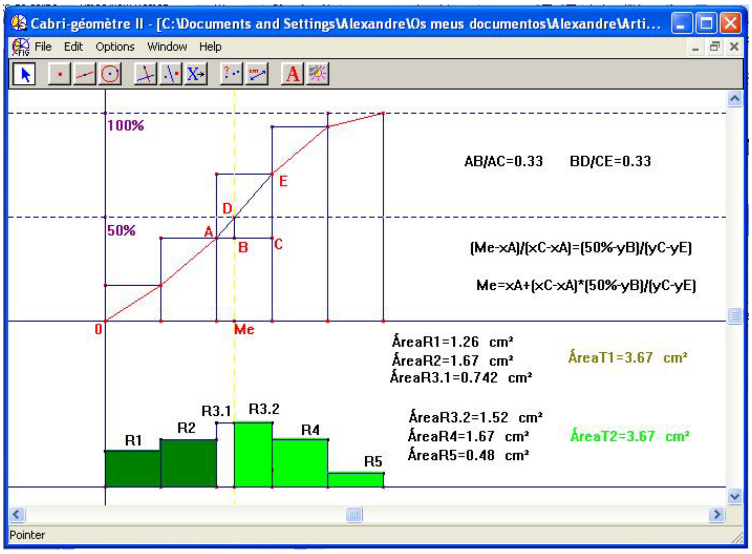


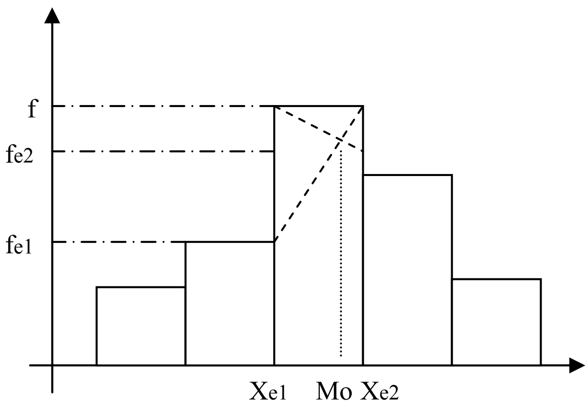
Figura 6: División del histograma en dos partes de área igual

- **Moda**

Para una distribución de frecuencias de una variable continua, a pesar de conocerse la clase modal – clase con mayor frecuencia en clases de igual amplitud – la determinación de la moda causa algunos problemas.

Hay varias fórmulas empíricas para localizar una estimativa de la moda dentro de la clase modal, y por supuesto que estos son valores aproximados que carecen de una interpretación cautelosa y cuidadosa, por lo que es de gran importancia conocer mejor el "funcionamiento" de las fórmulas.

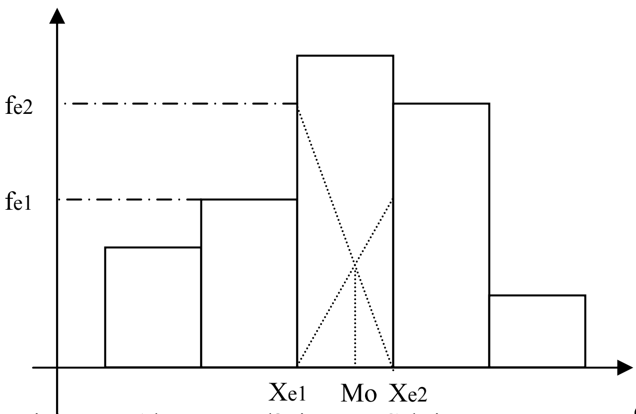
Existe un proceso geométrico para la obtención del valor de la moda, que se basa en el principio de que, dentro de la clase modal, la moda se debe encontrar más próxima de la clase adyacente con mayor frecuencia, y que usa la semejanza de triángulos para obtener la fórmula de cálculo:



$$\frac{Mo - x_{e1}}{x_{e2} - x_{e1}} = \frac{f - f_{e1}}{(f - f_{e1}) + (f - f_{e2})}$$

$$Mo = x_{e1} + \frac{f - f_{e1}}{(f - f_{e1}) + (f - f_{e2})}(x_{e2} - x_{e1})$$

Otra de las fórmulas, puede que sea la más conocida y usada, es la fórmula de King, que se basa en el mismo principio de la fórmula anterior, y su expresión analítica es también obtenida a través de relaciones válidas por semejanza de triángulos:



$$\frac{Mo - x_{e1}}{x_{e2} - x_{e1}} = \frac{f_{e2}}{f_{e1} + f_{e2}}$$

$$Mo = x_{e1} + \frac{f_{e2}}{f_{e1} + f_{e2}}(x_{e2} - x_{e1})$$

Así, se puede crear una aplicación para poder visualizar las relaciones constantes cuando hay triángulos opuestos (ver figuras 7 y 8).

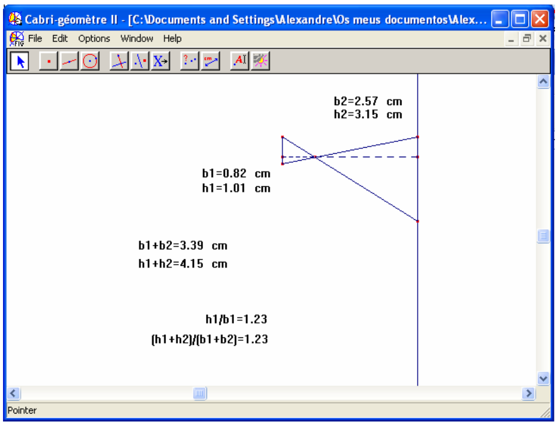


Figura 7: Triángulos opuestos

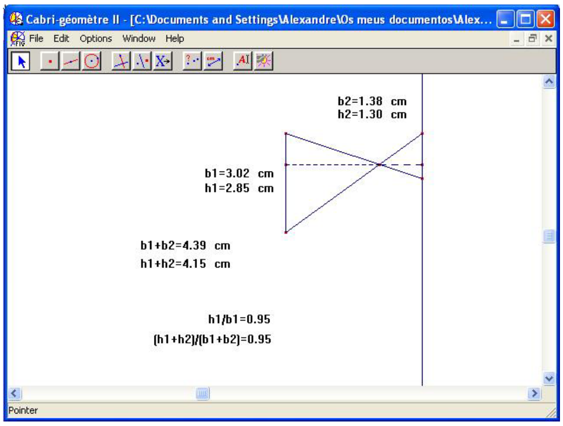


Figura 8: Triángulos opuestos

En la misma o en otra aplicación, se puede construir un histograma tipo y obtener la moda según el proceso analítico, bien como confirmar geométrica y dinámicamente las relaciones que permiten alcanzar una formula para el cálculo del valor modal (ver figura 9). Además, duplicando el histograma se puede obtener la moda según el método de King, confirmar, también, geométrica y dinámicamente, las relaciones que permiten alcanzar una formula para el cálculo del valor modal por este proceso y, de esta manera, comparar las estimaciones de los dos valores obtenidos (ver figura 10).

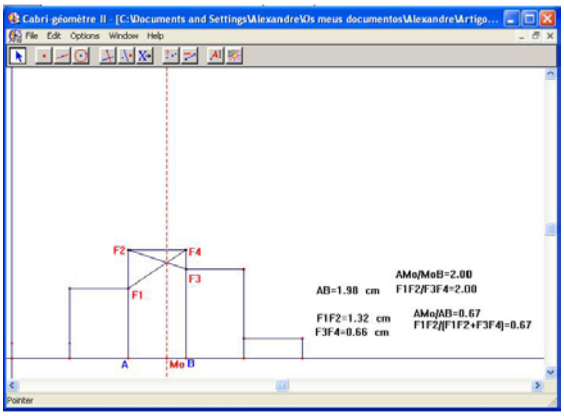


Figura 9: Proceso analítico (moda)

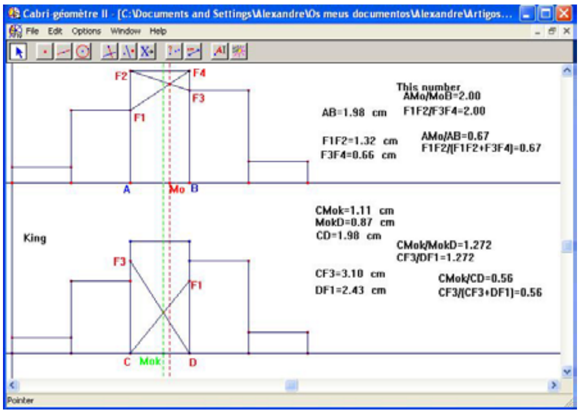


Figura 10: Proceso de King (moda)

De este modo fue creada una aplicación con el objetivo de comprobar las relaciones mencionadas, y también visualizar dinámicamente los dos procesos de obtención del valor de la moda y su comparación, tornando más fácil su percepción, percibiendo que el proceso analítico es más sensible a variaciones de las frecuencias de las clases adyacentes si estas son levadas (próximas de la frecuencia modal) y el proceso de King ya es más sensible a variaciones de las frecuencias de las clases adyacentes si estas son bajas. Es interesante crear casos extremos en los valores de las frecuencias de las clases adyacentes y, también, verificar en que situación los dos procesos tienen el mismo valor.

- **Media Aritmética**

Para datos no clasificados la expresión para la media aritmética es $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$.

Por otro lado, el momento centrado de orden uno es cero (0), ó sea, se puede decir que la media tiene como característica geométrica que la suma de las distancias de ella a los datos que le son inferiores es igual a la suma de las distancias de ella a los datos que le son superiores:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$$

Resulta entonces que, físicamente, la media aritmética puede ser interpretada como la abcisa (x) del centro de gravedad del sistema formado por los puntos $x_1, \ldots, x_N$ con pesos unitarios.

Basado en estas relaciones entre la media, la física y la geometría, se puede construir una aplicación con dos componentes, que están ínter ligados, y que se explicarán sucintamente a continuación (ver también figuras 12 y 13):

- Sin pérdida de generalidad, en una recta están colocados siete puntos, $x_1, \ldots, x_7$, con frecuencia unitaria, y está también colocado el punto M que puede ser movido a lo largo de la recta. Al mover el punto M se observa en la pantalla el valor, vsuma, de la medida del vector suma de los vectores con origen en el punto M y la otra extremidad en cada uno de los puntos, $x_1, \ldots, x_7$. Entonces, se puede procurar, de forma dinámica, la media haciendo que al punto M correr la recta de forma a que el valor vsuma pase a ser nulo.
- Es visible una "balanza" en que la recta, en que están los puntos, sirve de platos de la balanza y el punto M sirve de fiel de la balanza, de tal manera que ésta está en equilibrio cuando M coincide con la media, y se queda proporcionalmente desequilibrada a la vez que M se aleja de la media.

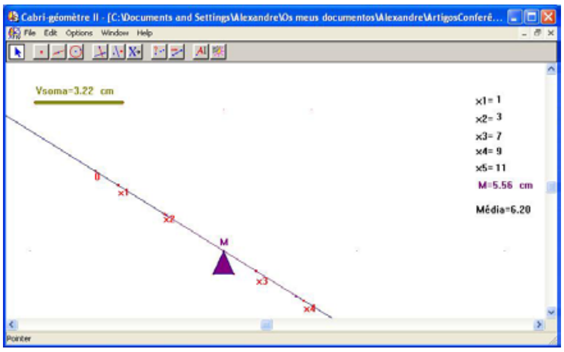


Figura 11: Media y balanza

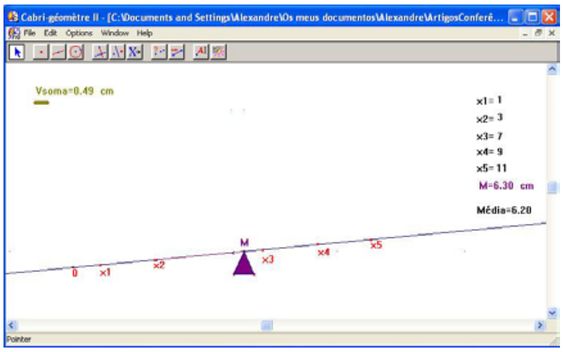


Figura 12: Media y balanza

Por fin, la aplicación, incluye el cálculo de la media aritmética, permitiendo que se haga una confirmación analítica del valor.

Otra posibilidad seria incluir los puntos en una reta fija, con frecuencias no necesariamente unitarias, y crear una balanza que representase la situación de equilibrio cuando un punto M coincide con la media, y se quedase proporcionalmente desequilibrada a la vez que M se aleje de la media (ver figuras 14 y 15).

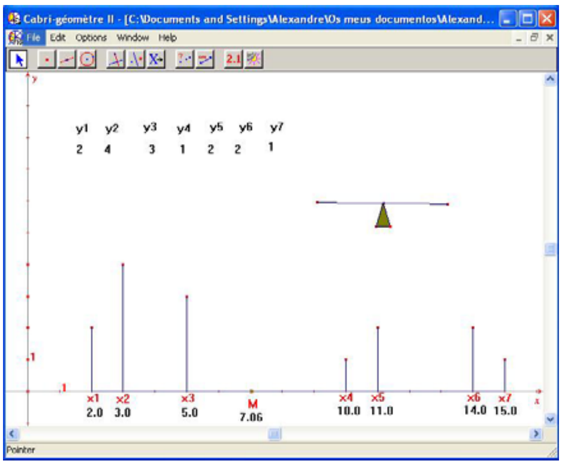


Figura 13: Media y balanza (datos ordenados)

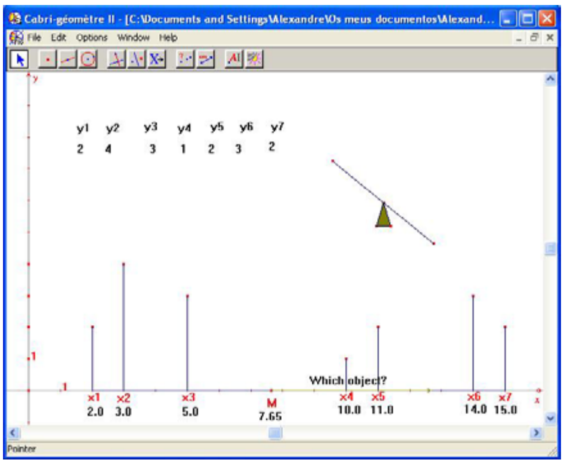


Figura 14: Media y balanza (datos ordenados)

- **Recta de regresión (método de los mínimos cuadrados)**

Dado un diagrama de dispersión con puntos (x_i,y_i) sugiriendo la existencia de regresión linear, tiene gran interés obtener, a partir de los datos, la ecuación de una recta que pueda ser tomada como una buena estimativa de la línea de regresión. De esta forma se puede describir formalmente la relación entre “y” y “x”, previendo también el valor de “y” cuando sea dado un valor de “x”. Puesto esto, se procura una ecuación de la recta de la forma $y^*=a+bx$.

Siendo $y_i^*=a+bx_i$, se definen los errores, o desvíos, como $di=y_i-y_i^*$.

Para determinar la recta referida es necesario obtener una estimativa de sus parámetros, “a” y “b”. Para tal, el principio base es, en general, el de que los desvíos deben ser tan pequeños cuanto posible. En ese sentido, el método más frecuentemente usado es el método de los mínimos cuadrados en que la determinación de los parámetros es hecha de manera a que la suma de los cuadrados de los desvíos sea mínima, esto es,

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y_i^*\right)^2 = \sum \left(y_i - \left(a + bx_i\right)\right)^2$$

es mínima.

En la aplicación a crear se puede, de una forma propicia a la interactividad tal como muestran las figuras 15 y 16, procurar ajustar una recta, a través de translaciones o rotaciones (con relación al punto de intersección entre la recta y el eje de los y´s), de manera a minimizar la suma del cuadrado de los desvíos, Somadi2. Simultáneamente, se pueden observar los desvíos (geométrica y numéricamente) y obtener la ecuación de la recta, además de poder eventualmente hacerse un estudio comparado con los resultados de la regresión linear obtenidos analíticamente y también verificar que la recta tiene que pasar por el punto ($\bar{x}, \bar{y}$).

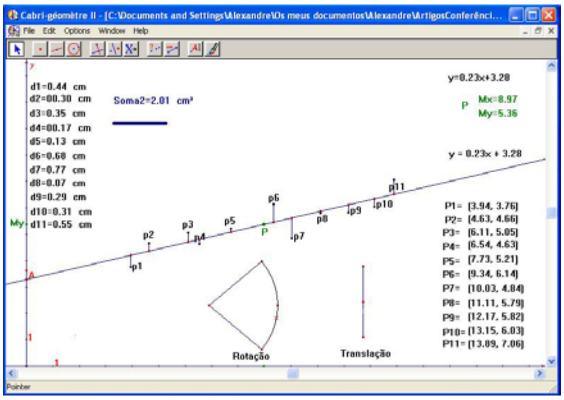


Figura 15: Reta de correlación

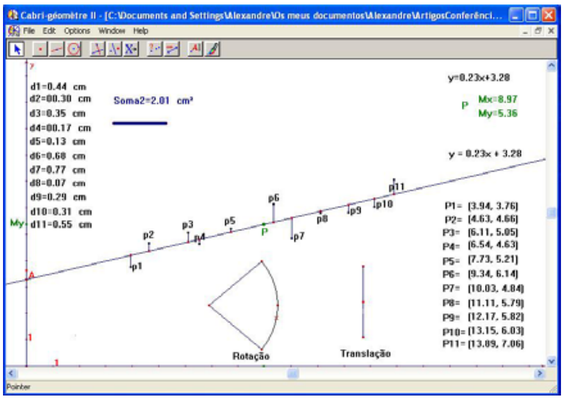


Figura 16: Reta de correlación

- **Gráficos**

En el campo de los gráficos, otras aplicaciones pueden ser hechas, potenciando el carácter visual de los gráficos a través del dinamismo que las aplicaciones en Cabri tienen.

Un ejemplo es una aplicación que muestre, de dos perspectivas diferentes, y en el caso de intervalos de igual amplitud, la igualdad entre las áreas del histograma y del polígono de frecuencias, que posibilite la verificación dinámica de la igualdad de las áreas, mismo cuando se hacen variaciones de las frecuencias (ver figuras 17 e 18).

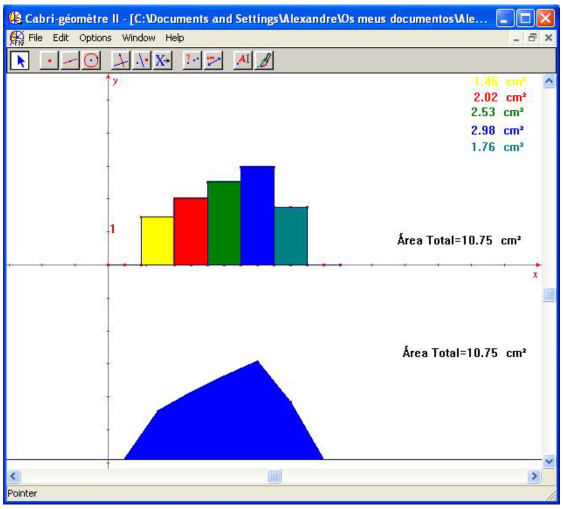


Figura 17: Histograma y polígono de frecuencias

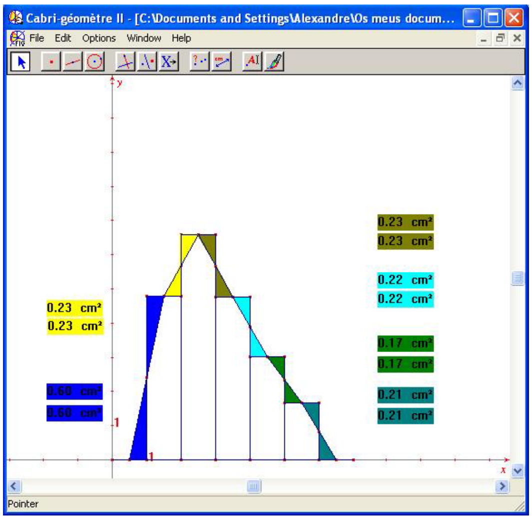


Figura 18: Histograma y polígono de frecuencias

Otro ejemplo es una aplicación que muestre la relación entre un gráfico de barras y el gráfico sectorial correspondiente, presentando los ángulos respectivos y verificando que existe, por ejemplo, una relación constante entre las áreas de las barras y los ángulos respectivos, tal como se puede observar en la figura siguiente:

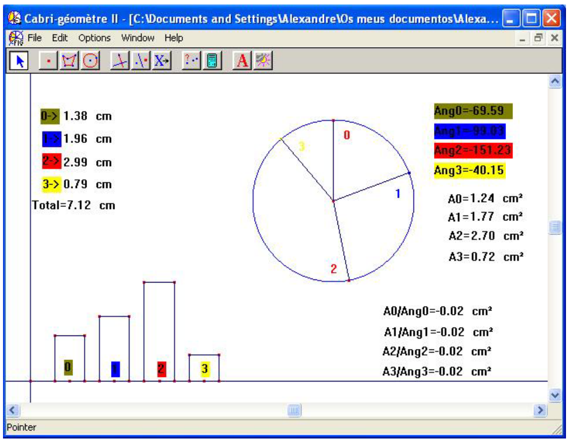


Figura 19: Gráfico de barras y gráfico circular

Finalmente, otra aplicación puede mostrar nos la obtención de los cuartiles usando el histograma y el polígono de frecuencias relativas acumuladas, además de hacer la construcción del diagrama de extremos y cuarteles (ver figuras 20 y 21), dando una visión dinámica del concepto, a veces tan difícil, como es el de los cuartiles.

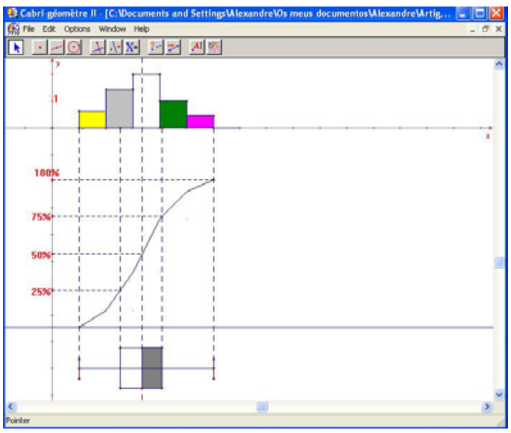


Figura 20: Diagrama de extremos y cuartiles

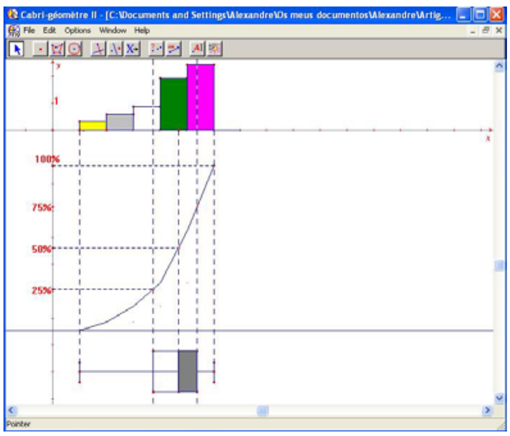


Figura 21: Diagrama de extremos y cuartiles

CONCLUSIÓN

Los ejemplos presentados, que cualquier persona con conocimientos mínimos de utilización de software de geometría dinámica consigue implementar, habrán cumplido los objetivos iniciales si despertaron interés y si, a través del potencial de la geometría dinámica, pudieren ser considerados, no sólo, como ejemplos versátiles, capaces de estimular y facilitar en los alumnos la asimilación, interpretación y comprensión de algunos conceptos básicos de estadística descriptiva y de algunas de sus propiedades, sino también como siendo capaces de promover una mayor interactividad en ambiente de clase facilitando y mejorando el trabajo del profesor.

Hay, con certeza, innumeras posibilidades de explotación de estas aplicaciones pudiéndose profundizarlas, mejorarlas y/o añadirles otras potencialidades, teniendo como motivación la curiosidad, la imaginación y la voluntad. ¡Aquí queda el desafío!

BIBLIOGRAFIA

Martins, J. Alexandre; CD-"Actas del Congreso IberoCabri 2002 - Taller: Estadística Descriptiva con Cabri-Géomètre", 2002

Martins, J. Alexandre;"Actas del VI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións - Aplicacións da Estadística: Estadística con Geometría Dinámica", Universidad de Vigo, 2003

Santos, Carlos; Pedro, Cláudia; ”Ensino e Aprendizagem da Estatística – Estatística: Utilização de Programas de Geometria Dinâmica”; Sociedade Portuguesa de Estatística, 2000

Talleres

TALLER DE TESELACIÓN

M.C. Minerva Aguirre Tapia
Fac. de Arquitectura, UANL.; CINVESTAV-IPN (México)
M.C. Antonio Codina Sánchez*
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales
Universidad de Almería (España)

INTRODUCCIÓN

En los programas de matemáticas para la escuela secundaria, en México (Grados 7-9), uno de los temas de geometría que se incluyen para primer grado es el estudio de la simetría axial como una propiedad de algunas figuras. Entre otras actividades, se sugiere la completación de figuras de modo que sean simétricas con respecto a una recta dada (Alarcón *et al.*, 1995, p. 242). Se señala que el estudio de la simetría axial debe incluir:

- Observación, enunciado y aplicación de las propiedades de simetría axial de una figura a partir de situaciones que favorezcan las manipulaciones, el dibujo y la medición.
- Determinación y trazado de los ejes de simetría de una figura, en particular de figuras usuales.
- Aplicaciones a la solución de problemas; en la construcción y trazado de mediatrices y bisectrices; … (Alarcón *et al.*, 1995, p. 23)

En el mismo *Libro para el maestro* se asevera que el estudio de las simetrías de las figuras permite a los alumnos familiarizarse con las propiedades de éstas; y se informa que “[m]uchos resultados y teoremas de la geometría que al inicio de su aprendizaje no pueden tratarse formal o deductivamente, se vuelven fácilmente reconocibles cuando se estudian desde el punto de vista de la simetría de las figuras” (Alarcón *et al.*, 1995, p. 242).

Por otro lado, en la parte de geometría del programa de estudios de matemáticas para segundo grado de educación secundaria se incluyen los temas de simetría axial y simetría central, los cuales se estudian como transformaciones de una figura. Se señala que “[e]s importante que los alumnos observen las propiedades de isometría de estas transformaciones: conservación de la colinealidad, de las distancias y de los ángulos, y las utilicen en la solución de problemas muy diversos” (Alarcón *et al.*, 1995, p. 245).

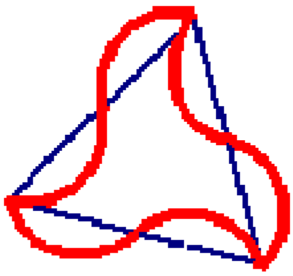
En este taller se quiere aplicar las Transformaciones Geométricas al uso de patrones y diseños, para rellenar el plano, y que los maestros de nivel medio puedan llevar la experiencia del taller a su quehacer en el aula.

---

* Perteneciente al grupo de investigación FQM193 de la Junta de Andalucía y al proyecto REPREPROEDUCA del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

TESELACIONES

A lo largo de la historia se han utilizado motivos geométricos con fines decorativos. Han sido muchos los objetos que han sido embellecidos con diseños geométricos regulares, tales como vasijas, tejidos, puertas, ventanas y la ornamentación de muros y suelos. Estas decoraciones han sido realizadas mediante **mosaicos**, entendidos como el recubrimiento del plano mediante piezas, llamadas teselas, (habitualmente losetas o baldosas) que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir. Existe un número ilimitado de formas de recubrir el plano, en este trabajo abordaremos las situaciones más simples, los denominados mosaicos regulares así como mosaicos irregulares.

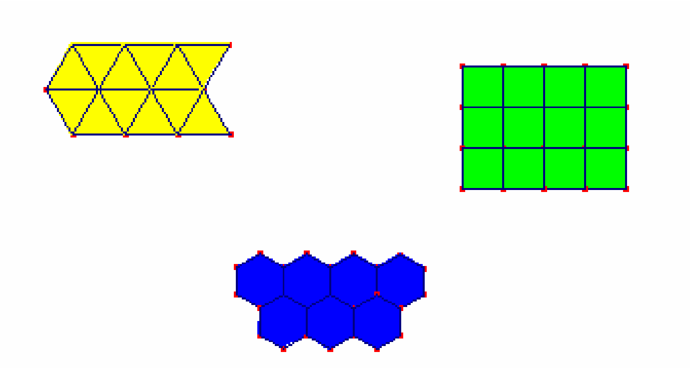


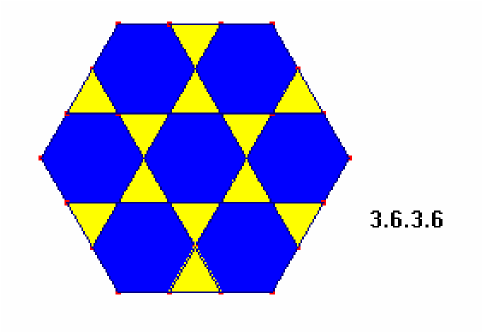
Mosaico de la Alhambra

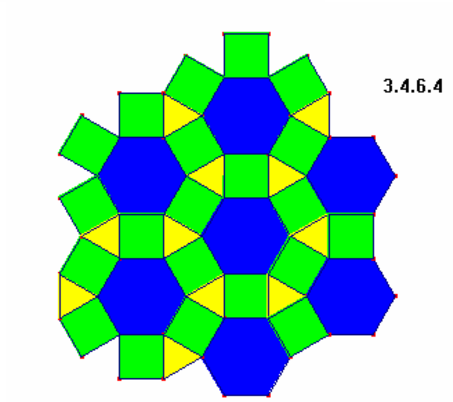
Se llaman **mosaicos regulares** si la tesela utilizada en este recubrimiento son polígonos regulares iguales, uniendo lado con lado. Es fácil probar empíricamente que sólo hay tres polígonos regulares que teselan por sí solos el plano, estos son: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Ahora bien, si lo que se pretende es realizar un mosaico con polígonos regulares de igual lado que concurran en un vértice, el número de mosaicos diferentes[1] que se pueden realizar son 21 y estarán compuestos como un mínimo de 3 y un máximo de 6 polígonos regulares diferentes.

A continuación mostramos los mosaicos regulares utilizando sólo un polígono y dos ejemplos de mosaicos utilizando más de un polígono regular:

[1] Para ver los 21 mosaicos distintos se puede visitar la página de Arriero, C. y García, I. http://platea.mecd.es/~mcarrier/mosaicos/mosaicos.htm

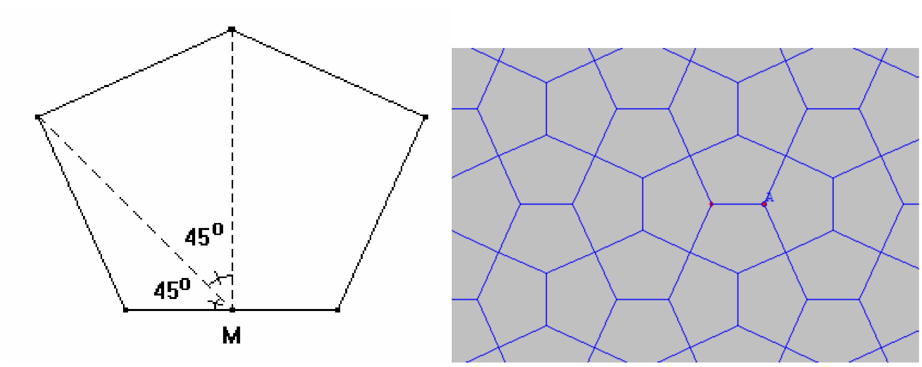






No debemos olvidar que para realizar una teselación hay que considerar propiedades de las figuras (número de lados, ángulos internos e externos, etcétera) así como también las Transformaciones Isométricas en el plano (giros, translaciones y simetrías)

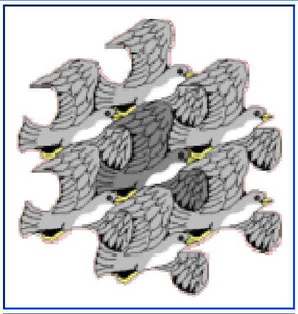
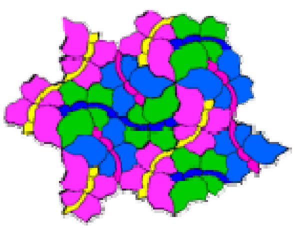
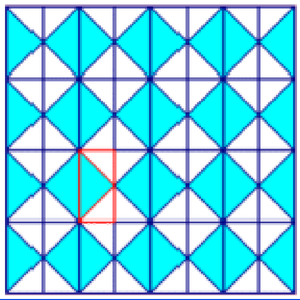
Aunque nosotros trabajaremos fundamentalmente con mosaicos regulares, es importante también que se destaque que a pesar de que un pentágono regular no tesela el plano, si existe un pentágono de lados iguales que lo hace:



Teselación del Cairo

En este taller también se abordará la teselación del plano con mosaicos regulares deformados, abandonando la regularidad, así como la construcción de mosaicos que se pueden observar en obras arquitectónicas como la Alambra utilizando teselas que son modificación de algún lado de los polígonos de mosaicos regulares, conectando las matemáticas con el arte y la arquitectura. La deformación simplemente ha de mantener cierta simetría. Además se realizará la teselación sólo por traslación, o sólo por rotación, o combinadas.

Nótese que la simple observación y análisis de embaldosados, nos permite comprobar que estos se construyen sobre la base de transformaciones isométricas como se aprecia en los siguientes ejemplos:

		
Embaldosado por traslación	Embaldosado por rotación	Embaldosado por reflexión

Se sugiere para el desarrollo de este taller un **programa de Geometría Dinámica**, como el Cabri-Géomètre, donde el maestro pueda realizar transformaciones isométricas como Traslación, Simetría y Rotación en las Teselaciones.

REFERENCIAS:

Alarcón, J. y otros (1995). ***Matemáticas. Libro para el maestro***. Secundaria, S.E.P., México.

Arriero, C. y García, I. (2003). *Página personal*. http://platea.mecd.es/~mcarrier/mosaicos/mosaicos.htm (Accesado 14/04/2004)

Codina A. y Becerril, E (2003). **Teselando con Cabri.** *Revista Mexicana de Pedagogía*, 72, 1-4

Day, R. y otros (2001). ***Navigating through Geometry in Grades 9-12.*** NCTM. United States of America.

Página del Profesor en línea: http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm (Accesado el 20/04/2004)

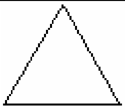
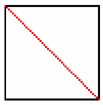
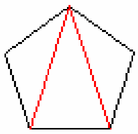
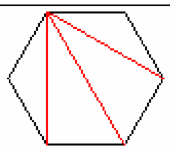
Serra, M. (1997). ***Discovering Geometry. An Interactive Approach.*** Key Curriculum Press. United States of America.

TALLER DE TESELACIONES

M.C. Minerva Aguirre Tapia
maguirre@mail.cinvestav.mx

Un polígono es teselante cuando es posible acoplarlo entre sí con otros idénticos a el sin huecos ni fisuras hasta recubrir por completo el plano.

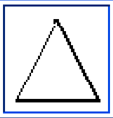
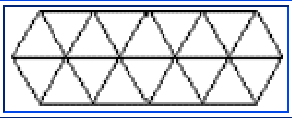
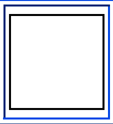
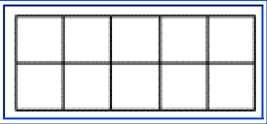
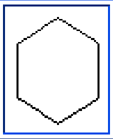
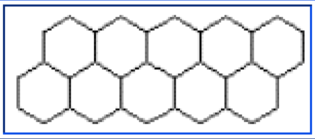
En la tabla siguiente se resumen algunas de las características de los polígonos regulares:

Nombre del polígono	Número de lados	Diagonales desde un vértice	Ángulos en el vértice	Suma de los ángulos
Triángulo	3	0 	60º	180º
Cuadrado	4	1 	90º	360º
Pentágono	5	2 	108º	540º
Hexágono	6	3 	120º	720º
n-ágono	n	n – 3	$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$	(n-2)180º

Algunas teselaciones importantes

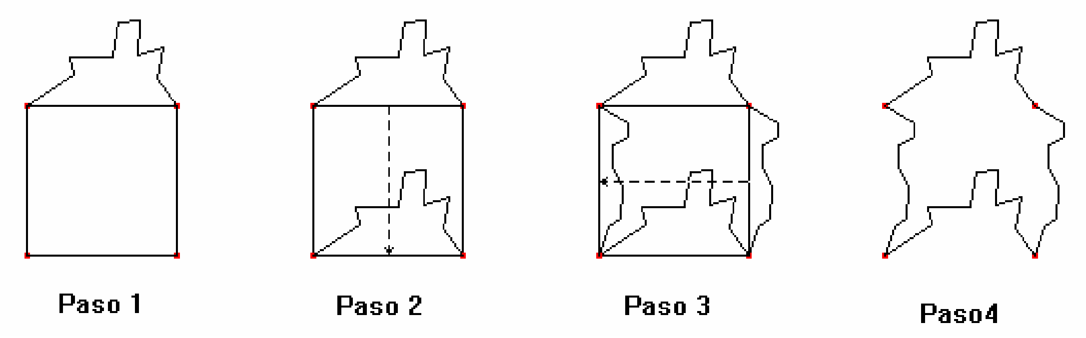
Cuando todos los polígonos de la teselación son regulares e iguales entre sí, se dice que la teselación es regular.

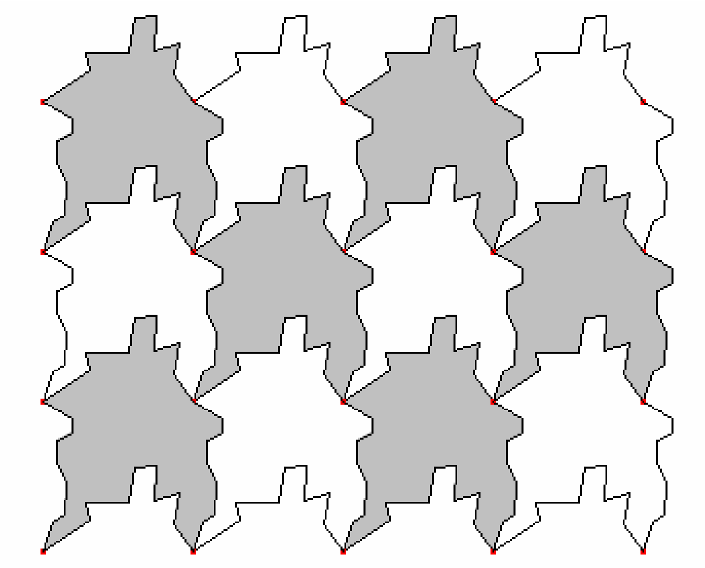
Ahora bien, sólo existen tres teselaciones o mosaicos regulares: la malla de **triángulos equiláteros**, el reticulado **cuadrado** como el del tablero de ajedrez y la configuración **hexagonal**, como la de los adoquines.

Teselación de Triángulos		
Teselación de Cuadrados		
Teselación de Hexágonos		

Para realizar una teselación hay que considerar propiedades de las figuras (número de lados, ángulos internos e externos, etcétera) así como también las Transformaciones Isométricas en el plano (giros, translaciones y simetrías).

Teselaciones utilizando solo **Traslación**:





REFERENCIAS EN INTERNET SOBRE TESELACIONES:

Math Forum Collection Contiene, entre una una grán cantidad de enlaces a temas matematicos, varios sobre teselas. Se pueden buscar más fácil en Math Forum: Power Search sin necesidad de traer el largo (500 Kb) archivo con todos los articulos.
Los siguientes enlaces solo hacen referencia a teselaciones que no son tipo Truchet, sino más bien tipo Escher.
Richard Dehlinger Bastante información y ejemplos de teselaciones.
How to make a tesselation
What is a tesselation? Proyecto sobre teselas, muy completo.
Q.B.E.S. Tesselation page, con definición y ejemplos de teselas hechos por niños. Contiene enlaces y biblografia.
HighLand Tesselations
Tesselmania Software para teselar dibujos.
Tesselations, Puzzle, prints, & More

---

http://personal.telefonica.terra.es/web/jmora7/Mitad/Java/cabrijava/0cuadra.htm

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm

CABRI-GÉOMÈTRE COMO AMBIENTE ADECUADO PARA ESTUDIAR CURVAS MECÁNICAS EN GEOMETRÍA

Víctor Larios Osorio (*vil@uaq.mx*)

Universidad Autónoma de Querétaro, Fac. de Ingeniería

Dirigido a: Profesores de Bachillerato o Preparatoria.

Número máximo de asistentes: 20.

Eje temático: Experiencias educativas alrededor del uso de Cabri en la clase.

RESUMEN: En este taller se propone una secuencia de actividades en las que se aprovechan tanto el carácter dinámico de Cabri-Géomètre, como su arquitectura para generar lugares geométricos (que es distinta a otros programas y tiene ventajas por sobre de ellos). Estas actividades están dirigidas a estudiar en el nivel medio curvas mecánicas, rectas y circunferencias asociadas a la Geometría del Triángulo que por otros medios resultarían tediosos y muy complicados de estudiar.

INTRODUCCIÓN

En la geometría del curriculum de bachillerato se abordan temas que proporcionan las bases para otros temas que no son abordados por el curriculum, en parte por la aparente falta de conexión entre éstos últimos y aquéllos, y en parte porque las herramientas tradicionales para el dibujo (la regla, el compás y la transportador) no permiten abordarlos adecuadamente. Este es el caso de la llamada "deltoide de Steiner" y, parcialmente, de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo.

En este taller se proponen algunas actividades que permiten no sólo la construcción de tales curvas asociadas al triángulo y entre sí, sino de reflexionar sobre la posibilidad de utilizarlas en los cursos de bachillerato en el ambiente de Cabri-Géomètre que incluya incluso la búsqueda de la construcción de demostraciones geométricas o la propuesta de argumentos deductivos acordes con el nivel educativo.

PROPÓSITOS

Los propósitos del taller son que los asistentes:

- conozcan curvas (algunas mecánicas) asociadas a la Geometría del Triángulo; y
- reflexionen sobre las ventajas que ofrece el Cabri-Géomètre como ambiente propicio para el estudio de curvas mecánicas asociadas a la Geometría del Triángulo.

ACTIVIDADES

Actividad 1. Construcción de la recta de Simson de un triángulo.

1. Se construye un triángulo *ABC* cualquiera.
2. Se escoge un punto *P* arbitrario y se trazan los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo que pasen por este punto que se denominarán *X*, *Y* y *Z*.
3. Se busca la propiedad necesaria de *P* para que *X*, *Y* y *Z* sean colineales.
4. Se realiza una construcción tal que se tome en cuenta la propiedad observada y se obtiene la recta de Simson de *P* con respecto a *ABC*.
5. Se crea un macro que permita la obtención de rectas de Simson.
6. Se pueden proporcionar argumentos al respecto.

Actividad 2. Construcción de la deltoide de Steiner.

1. Se construye un triángulo *ABC*, un punto *P* sobre la circunferencia circunscrita del triángulo y la recta de Simson correspondiente.
2. Utilizando la opción **traza activada** se observa el dibujo que se produce al arrastrarse el punto *P* (es decir, la envolvente de las rectas de Simson).
3. Se crea la deltoide de Steiner del triángulo *ABC* con la opción **lugar geométrico**.
4. Se plantean algunas interrogantes relacionadas con el tamaño de la deltoide y su centro.

Actividad 3. Construcción de una circunferencia.

1. Se construye un triángulo *ABC* y un punto *P* sobre la circunferencia circunscrita.
2. Se construye un punto *Q* sobre la circunferencia circunscrita diametralmente opuesto a *P*, así como las rectas de Simson de *P* y *Q*.
3. Se observa qué tipo de curva genera el punto de intersección de las dos rectas de Simson construidas. Para ésto se utiliza la opción **traza activada** o **lugar geométrico** y se puede determinar que dicha curva es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo.

Actividad 4. Construcción de la circunferencia de los nueve puntos.

1. Se proporciona la razón del nombre de la “circunferencia de los nueve puntos”.
2. Se construye un triángulo *ABC* y su circunferencia de los nueve puntos.
3. Se observan sus propiedades relacionadas con su tamaño y su centro.
4. Se construye la circunferencia circunscrita del triángulo y se observan nuevamente las relaciones entre los tamaños y los centros de ambas circunferencias.

5. Se proponen argumentos que sostengan lo observado.

Actividad 5. Relación entre un circunferencia y una deltoide.

1. Se construyen un triángulo *ABC* y su circunferencia circunscrita.
2. Se construyen la circunferencia de los nueve puntos y la deltoide de Steiner del triángulo.
3. Se observan los puntos de tangencia entre estas dos últimas curvas y sus relaciones en cuanto a su tamaño y posición.
4. Se consideran las relaciones observadas en el punto anterior, así como las observaciones realizadas en la actividad anterior (la 4), para proporcionar argumentos que contesten las interrogantes planteadas en la actividad 2.

BIBLIOGRAFÍA

Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Editorial Limusa-Wiley.

Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. (1993). *Retorno a la geometría*. España: DLS-Euler Editores.

De Guzmán, M. (1998). *La envolvente de las rectas de Wallace-Simson en un triángulo: una demostración sencilla del teorema de la deltoide de Steiner*. Visitado en febrero 18, 2002 (actualización diciembre, 1998), en *http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Deltoide121298/00deltoi.htm*.

Larios O., V. (En prensa). "Triángulos y deltoides con Geometría Dinámica". *Educación Matemática*. (Aceptado para su publicación.)

Weisstein, E. W. (2002). "Deltoide". En *Eric Weisstein's world of mathematics*. Visitado en febrero 18, 2002 (actualización 2002), en *http://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html*.

CABRI PARA TODOS

Emilio de León Dávila

María Teresa López Hernández

María Eugenia Orozco Aguirre

Centro Siglo XXI Informática Educativa

Nazario S. Ortiz Garza # 1560

Unidad Campo Redondo Saltillo, Coah.

siglo21@csxxi.sepc.edu.mx

ANTECEDENTES:

En el ciclo escolar 1999-2000, en el Estado de Coahuila, empezamos a trabajar con el Programa Emat, contando con la colaboración de SEP, CINVESTAV, ILCE, SEPC, U.A de .C. y Centro Siglo XXI; decidimos utilizar solamente la Hoja Electrónica de Cálculo, pero, debido a la necesidad de incrementar los temas del programa utilizando la tecnología educativa, capacitamos de manera informal, en el ciclo escolar 2002-2003, a algunos maestros en el manejo de Cabri-Geometre, con la lógica consecuencia de que los maestros han recibido una capacitación heterogénea..

En el año escolar 2004-2005, se pretende institucionalizar el uso de Cabri-Geometre, al adquirirse licencias del software, por lo cual, entre otras cosas, se crea la necesidad de capacitar adecuadamente a los maestros en su uso.

Tal es el objetivo de diseñar el curso **Cabri para todos**, tratando que cubra las expectativas de todos los maestros de matemáticas, tanto de aquellos que por primera vez abordan el programa como de los otros aquellos que cuentan ya, con poca o mucha experiencia y capacitación en el uso de Cabri.

Nuestra intención, por ende, es abordar las actividades teniendo sumo cuidado en que las mismas correspondan a los temas y propósitos que sustentan el Programa de Educación Secundaria de nuestro país, tales como:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Escoger o adaptar estrategias adecuadas para la resolución de un problema.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generalizar resultados.
- Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

Debido a que consideramos que nuestros cursos no solamente deben responder a las necesidades de capacitación técnica, sino también deben contener un sustento pedagógico firme, así como que deben de guardar siempre una relación estrecha con los programas oficiales, para que los maestros puedan encontrar un apoyo real en el uso de la tecnología, creemos que los temas a tratar son los siguientes:

I.- Uso de las herramientas básicas.

- Instalación del software.
- Conocimiento de la barra de herramientas y comandos de Cabri.
- Trazar puntos, rectas, segmentos, semirrectas y circunferencias, y el uso de algunas herramientas básicas de formato.
- Ocultar herramientas
- Resolver problemas que conduzcan a la práctica de trazos geométricos y a la exploración de propiedades como son:

a. Trazar la mediatriz de un segmento
b. Trazar rectas perpendiculares que pasen por un punto de la recta y por un punto fuera de ella.
c. Trazar una recta paralela a otra, que pase por un punto exterior a la recta.
d. Trazar la bisectriz de un ángulo
e. Trisectar un segmento dado

- Revisar las construcciones paso a paso

II:- Construcción de figuras geométricas y sus macros

- Construcción de figuras geométricas y exploración de algunas de sus propiedades como:

a. Cuadrado

b. Rombo

c. Romboide

- Revisar las construcciones.
- Elaborar macros para construir algunas de las figuras geométricas anteriores.
- Aplicar las propiedades básicas en la solución de problemas.

a) Dibujando Cuadriláteros

a) Razón áurea o dorada

III.- Simetrías y transformaciones geométricas

a) Simetría Axial

b) Simetría central

c) Simetría de rotación

d) Homotecia. directa e inversa

- Analice sus propiedades mediante la manipulación de figuras
- Resuelva problemas en los que aplique las simetrías y la homotecia.

IV.- Exploraciones en el círculo

- Trazar rectas tangentes a la circunferencia, dado un punto de la misma o un punto exterior a la misma.
- Trazar ángulos centrales, ángulos inscritos y semiinscritos en circunferencias, comprobar algunas propiedades transformándolos mediante su manipulación y tabulando las medidas obtenidas

a) Encontrar la relación entre un ángulo inscrito y un ángulo central que interceptan al mismo arco.

b) Encontrar la relación entre un ángulo semiinscrito y un ángulo central que interceptan al mismo arco.

c) Angulo inscrito en una semicircunferencia

    - Resuelva problemas diversos

- Construcción de una circunferencia que pase por tres puntos dados.
- Cuadrilátero inscrito en una circunferencia

Bibliografía:

Guía de Usuario de Cabri-Geometry II

Texas Instruments

Introducción a Cabri-Geometry II

Texas Instruments

Geometría Dinámica. Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología. SEP. Educación Secundaria.

Coordinación Sonia Ursini Legovich y Mónica Orenday Tremer.

Autores: Gonzalo Zubieta Badillo, Alfonso Martínez Vera, Teresa Rojano Ceballos, Sonia Ursini Legovich.

Libro para el Maestro . Educación Secundaria. Matemáticas. SEP. Matemáticas

Coordinación: Jesús Alarcón Bortolussi

Autores: Jesús Alarcón Bortolussi, Elisa Bonilla Rius, Rocío Nava Alvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero.

Geometría con Cabri

Autor: Alberto Bagazgoitia

Geometría Dinámica con Cabri

Compilador: Mtro. Fortino Fregoso Fragoso

Documentos Centro Siglo XXI

Autores: Profra. Guadalupe Aguirre Fuentes, María Eugenia Orozco

Tres tipos de Macros con Cabri-Géomètre

Eugenio Díaz Barriga Arceo
Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen:

En este taller se desarrollarán actividades para presentar tres tipos de macros en el ambiente Cabri-Géomètre: macros numéricas, geométricas y lógicas. El taller sirve de laboratorio de experimentación para diversas construcciones que al combinarse pueden presentar de modo muy atractivo diversos temas de matemáticas. Trazos, cálculos y textos alusivos pueden aparecer en cualquier momento para darle vida y expresividad a una cabri-construcción: la habilidad del diseñador entra en juego para que el cabri-dibujo y el movimiento "hablen" con el usuario.

Introducción

En Cabri-Géomètre, la interfase incluye la posibilidad de agregar nuevos comandos a través de la herramienta llamada macro construcción o brevemente macro. Las macros cumplen varias funciones:

- Se asigna un nombre y un icono a un proceso constructivo.
- Simplifican trazos, pues no incluyen los trazos (o cálculos) auxiliares.
- Generan nuevos objetos o propiedades matemáticos.
- Enseñan a la interfase un proceso constructivo.
- Hacen conciencia de los elementos que intervienen en un problema.
- Elevan el nivel de complejidad de las nuevas construcciones.Una macro en Cabri-Géomètre queda completamente definida por el proceso constructivo, sus objetos iniciales, los objetos finales y un nombre. La condición para que se valide la macro en el entorno Cabri-Géomètre es que el proceso constructivo debe describir ***sin ambigüedad*** la forma de obtener los objetos finales a partir de los objetos iniciales.

De acuerdo a los objetos finales que se obtienen, las macros pueden clasificarse en cuatro tipos:

a) Geométricas: los objetos finales son segmentos, puntos, polígonos, etc.

b) Numéricas: los objetos finales son uno o varios números (incluiremos aquí a las coordenadas de puntos y a las expresiones algebraicas de rectas y cónicas)

c) Lógicas: los objetos finales son textos que indican si una o varias condiciones se cumplen.

d) Mixtas: una combinación de objetos finales (geométricos, numéricos, lógicos).

Dos macros geométricas: circuncírculo y división de un segmento en n partes iguales.

Tradicionalmente se pide a los estudiantes conocer los siguientes trazos con regla y compás: dado un triángulo arbitrario, se pretende encontrar una circunferencia que pase por los vértices del triángulo. En la solución del problema se exige que la regla que se use no tenga marcas y que para trazar una circunferencia de antemano deben conocerse su centro y radio.

Si los vértices del triángulo son A, B y C, respectivamente, la idea general es trazar primero la recta que se encontrará a igual distancia de A que de B, en seguida se procede igual con los vértices B y C; se busca el punto de intersección de las rectas, que será el centro de la circunferencia; el radio será el segmento que une este punto (llamado circuncentro) a cualquiera de los vértices (el círculo obtenido se llama circuncírculo). Por supuesto, un resultado importante es mostrar que una tercera recta que sea equidistante de los puntos A y C pasará también por el mismo centro.

Continuando con las restricciones clásicas del uso de la regla y el compás, la división de un segmento en n partes iguales puede realizarse de la siguiente forma: primeramente se traza el segmento AB que se ha de dividir; en seguida, a partir de A se traza una semirrecta no alineada con el segmento; después una primera circunferencia C_1 con radio arbitrario centrada en A, para obtener el punto de intersección A_1 entre la semirrecta y la circunferencia; ahora se traza una circunferencia C_2 con centro en A_1 y radio el mismo radio, es decir AA_1; se localiza nuevamente el punto de intersección entre la última circunferencia trazada y la semirrecta. Se repite este proceso hasta obtener una colección de n puntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ uniformemente espaciados en la semirrecta[1]. Ahora se une el punto A_n con el punto B mediante un segmento y se trazan paralelas a él que pasen por cada uno

[1] Si en la construcción anterior se substituye la semirrecta por un segmento que parta de A, puede ser necesario dilatar dicho segmento para que las circunferencias puedan intersectarse con el segmento. Esta razón provoca que una macro no quede bien definida: los objetos finales no siempre se generan conocido el segmento AB (y por ende el número n de partes iguales en el que se divide al segmento queda ambiguo).

de los puntos de la colección. Los puntos de intersección de estas paralelas con el segmento problema *AB* forman una colección de puntos (llamémosles $\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n=B\}$ respectivamente) que dividen al segmento en *n* partes iguales. La justificación de la validez de tal construcción puede formularse en términos del conocido teorema de Tales.

La primera construcción tiene como objeto inicial el triángulo *ABC* y como objeto final el circuncírculo; también pueden darse como objetos iniciales los tres puntos *A*, *B* y *C*, con el mismo objeto final. En la segunda construcción es el segmento *AB* el objeto inicial (o sus puntos extremos *A* y *B*) y la colección de puntos $\{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n=B\}$ los objetos finales. Estos ejemplos muestran que se pueden obtener los mismos objetos finales partiendo de objetos iniciales diferentes, resolviendo exactamente el mismo problema. En la interfase de Cabri-Géomètre una macro o un comando puede funcionar sin ambigüedades de esta manera (por ejemplo, el comando recta perpendicular acepta como uno de los objetos iniciales necesarios una recta, un segmento, un vector o un lado de un polígono).

Actividad 1. Puntos y rectas notables del triángulo.

Trace un triángulo cualquiera ABC. Además, tracemos una circunferencia de radio arbitrario con centro en un punto que tenga como etiqueta la palabra "mediatriz". También dibujemos un vector cuyo punto de partida tenga como etiqueta "¿qué es una ..." y como punto final en la punta de flecha tenga como etiqueta el símbolo "?". Recuerde o busque las definiciones de las rectas siguientes:

a) *Mediatriz de un segmento,*
b) *Bisectriz de un ángulo,*
c) *Mediana con respecto a un lado del triángulo.*
d) *Altura de un triángulo con respecto a uno de sus lados.*

Si estas rectas sólo tienen que ver con respecto al triángulo, usted se preguntará para qué queremos la circunferencia o el vector que hemos trazado adicionalmente. Hasta aquí no hemos utilizado Cabri-Géomètre en toda su potencia. Es frecuente encontrar en los manuales o incluso en alguna página web, los procedimientos paso a paso para definir macros y usarlas en el trazo de cada una de las rectas con respecto a cada lado del triángulo. Nos apartaremos de ese camino y propondremos explorar lo siguiente, para dar contexto a una nueva clase de macros.

Dos macros lógicas: punto en el interior y punto ping – pong.

¿Qué son las macros lógicas? En un lenguaje de programación, existen instrucciones del tipo "si P entonces Q", "mientras que P entonces se realiza Q", etc. La proposición encerrada en Q (el consecuente) puede ser la aparición de un texto que hable sobre el cumplimiento de una condición, tal como lo trataremos aquí, aunque esto puede ser equivalente a la aparición de un objeto geométrico. La Geometría Dinámica puede emular esta clase de comandos con construcciones geométricas que se cumplen bajo cierta condición que no es más que aquella que se encuentra encerrada en la proposición P (el antecedente).

El objetivo de nuestra primera construcción será lograr que, cuando la punta de flecha del vector se introduzca dentro de la circunferencia, en nuestro triángulo aparezca una mediatriz, por ejemplo la mediatriz del lado AB y además una explicación de lo que es una mediatriz, a saber, la recta cuyos puntos equidistan de los puntos extremos del segmento AB. En caso contrario, es decir, si la punta de flecha se encuentra fuera de la circunferencia, sólo deberá mostrarse el triángulo ABC. En todo momento, los vértices del triángulo deben contar con libertad para moverse a cualquier lugar del plano.

¿Cómo enseñarle a Cabri-Géomètre a detectar si un punto (la punta de flecha del vector) se encuentra dentro o sobre una circunferencia? Probemos hacer lo siguiente:

Tracemos la semirrecta que une el centro de la circunferencia con el punto de interés y trace una perpendicular a la semirrecta que pase por dicho punto. Trace también el segmento que va del centro hasta el punto de intersección entre circunferencia y semirrecta.

Al explorar el plano con el punto, la perpendicular intersecta al segmento sólo cuando el punto se encuentra en el interior o sobre la circunferencia. Por ello, mediante el comando punto de intersección, trace el punto de intersección entre segmento y perpendicular. Como resultado de esta operación, Cabri-Géomètre superpone un nuevo punto en nuestro punto exploratorio cuando y sólo cuando se encuentra en la región deseada: Cabri-Géomètre responde con un punto a nuestro llamado. Llamémosle a este punto simplemente "P int".

Una macro puede resumir nuestro anterior enredo considerando a la punta de flecha y a la circunferencia como objetos iniciales; el objeto final será el punto "P int". Debemos aprovechar su existencia para trazar en el triángulo la mediatriz solicitada, la mediatriz del lado AB.

Se necesita que aparezca un punto sobre uno de los vértices A o B, justo cuando aparece el punto P int. Elijamos al punto A. Mientras se nos ocurre algo, juguemos ping – pong: primero, pongamos la red entre los puntos P int y A mediante el comando punto medio; en seguida saca el punto P int y se traza el simétrico de P int con respecto al punto medio. Como producto de nuestro juego, aparece un punto sobre el punto A, que existe sólo si P int existe. El punto puede llamarse ping – pong, pero no es necesario etiquetarlo.

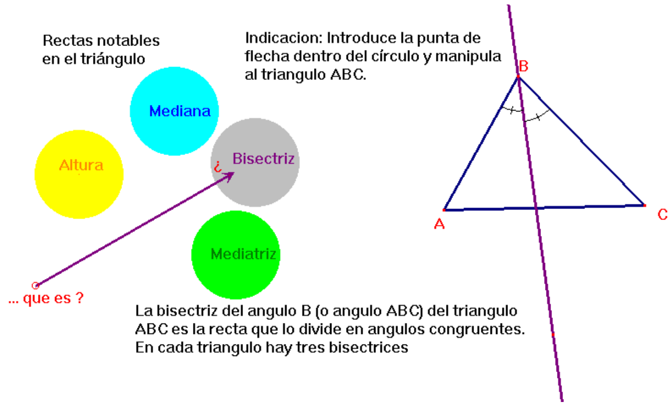
Ahora la mediatriz. Mediante el comando correspondiente trace la mediatriz entre el punto ping – pong (superpuesto al punto A) y el punto B. La mediatriz aparece sólo cuando la punta de flecha del vector está en la posición conveniente.

Hemos dicho que en las macros lógicas los objetos finales son *textos*. Hagamos aparecer algún texto conveniente para cuando ocurra efectivamente en la construcción que se ilustre la mediatriz.

Preguntemos algo redundante al entorno: con el comando que verifica si un punto pertenece a un objeto, preguntemos si P int se encuentra en el segmento correspondiente de la semirrecta. Por supuesto, en la interfase la respuesta será que “El punto se encuentra sobre el objeto”. Podemos cambiar este texto por algo más representativo del trabajo que hemos realizado; utilicemos el comando de los comentarios para editar y modificar dicho texto; reemplacémoslo con una leyenda como “La punta de flecha se encuentra en el interior”, “punto en el interior” o mejor aún, siguiendo la idea de esta actividad, escribamos una explicación completa de lo que es una mediatriz: “La mediatriz del segmento AB es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento. Todo punto en ella se encuentra equidistante a ambos extremos del segmento.”.

Finalmente sólo dos cosas más antes de la siguiente actividad:

a) Realice las construcciones necesarias para una altura, una mediana y una bisectriz.
b) Identifique los objetos iniciales y finales de las macros lógicas descritas.



Actividad 2. Bisección y trisección de un ángulo dado.

Abordaremos el problema de dividir un ángulo dado en dos partes iguales bajo la restricción del uso de una regla sin graduación y un compás griego. Dentro de la interfase Cabri-Géomètre esto debe interpretarse como la prohibición de algunos comandos. Concretamente, podemos utilizar sólo los comandos: punto, recta y circunferencia.

Tracemos tres puntos P, Q y R. Tracemos los lados del ángulo QPR, el ángulo que bisectaremos. La construcción puede hacerse de la siguiente forma: Con centro en el punto P y radio arbitrario, se traza la circunferencia C. Dicha circunferencia intersecta los lados del ángulo QPR en dos puntos; llamemos Q1 al punto de intersección en el lado PQ y R1 al punto en el lado PR. En seguida, trazamos dos nuevas circunferencias C1 y C2, de radio igual a C, centradas en Q1 y R1 respectivamente. El punto de intersección entre ellas y el vértice del ángulo QPR definen la bisectriz buscada.

La imposibilidad de trisectar un ángulo dado arbitrariamente bajo la restricción clásica, problema enunciado alrededor del siglo V antes de nuestra era, fue demostrada sólo hasta fines del siglo XIX. Usualmente se presenta primero la imposibilidad de trisectar el ángulo de 60º como equivalente a encontrar la solución de cierta ecuación cúbica empleando números que se encuentran en cierto campo y después se argumenta diciendo que encontrar un procedimiento de carácter general será imposible.

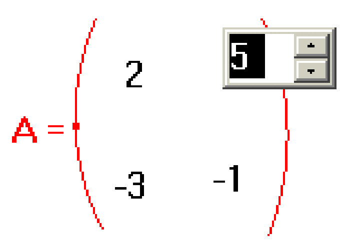
Tan natural como contar como un par de escuadradas además de la regla y el compás para simplificar trazos, en el entorno Cabri-Géomètre se cuenta con comandos adicionales, como los comandos de medición de distancias y longitudes así como el de transferencia de medidas, que actúan sobre segmentos, perímetros de polígonos, circunferencias y arcos de circunferencias para realizar de modo más simple las construcciones.

Para trisectar un ángulo con tales recursos, una idea que puede seguirse es asociar al ángulo un arco cuya medida sea registrada, para transferirla a un segmento que podamos trisectar y después transferir la medida resultante al arco para encontrar finalmente la recta trisectriz. En casos como el descrito, el uso del comando calculadora simplifica la resolución del problema. Finalmente, identifique los objetos iniciales y finales de las macros en estos problemas.

El segundo problema nos lleva a una conclusión que deseamos recalcar: Cabri-Géomètre no es sólo la geometría de regla y compás. Observe que sus comandos permiten aún más que eso.

Actividad 3. Dos macros numéricas: determinante de una matriz y producto de una matriz por un vector.

Definamos una primera matriz 2 por 2 como un arreglo de cuatro números, 2 por cada una de las 2 filas del arreglo. Para hacerlo con Cabri-Géomètre, simplemente usamos el editor numérico y generamos los cuatro números y con el puntero los reacomodamos de la manera habitual. Esta matriz será la base de nuestras construcciones.



Matrices cuadradas: comenzando por el tamaño 2 por 2.

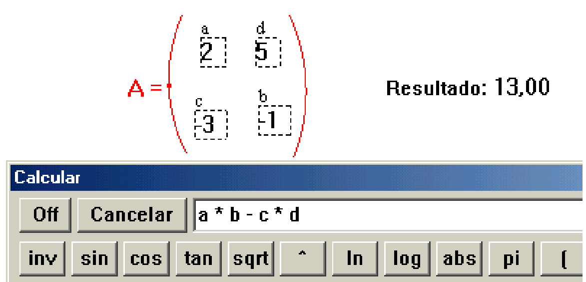
Si deseamos que se parezca a la manera en que las escribimos usualmente en el aula, podemos agregar un par de arcos a manera de paréntesis que indiquen el nombre que llevará la matriz que se ha definido. O podemos utilizar segmentos si deseamos indicar determinantes; podemos etiquetar al punto medio con el nombre de la matriz o del determinante correspondiente.

Cómo obtener el determinante con una macro.

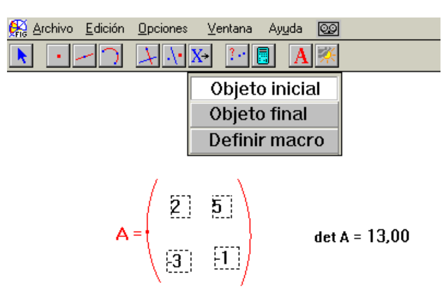
Para el cálculo del determinante de la matriz 2 por 2 que acabamos de definir, empleamos el comando calculadora e indicamos la diferencia de los productos usuales, esto es el cálculo

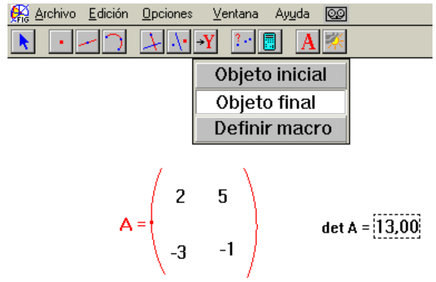
$$\Delta = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Este cómputo nos sirve para definir la macro que podemos llamar *determinante de matriz 2 por 2*. Los objetos iniciales son los elementos de la matriz, que podemos dar ordenadamente, por ejemplo, renglón por renglón; además, el objeto final es el cálculo efectuado. Cuando esta macro se utilice, los elementos de la matriz deben ser introducidos ordenadamente tal y como fueron introducidos para definir la macro.



Podemos hacer algunas exploraciones con esta macro. La primera: ¿cuál es el valor del determinante si intercambiamos el orden de los renglones de la matriz? ¿y si intercambiamos el orden de las columnas?.



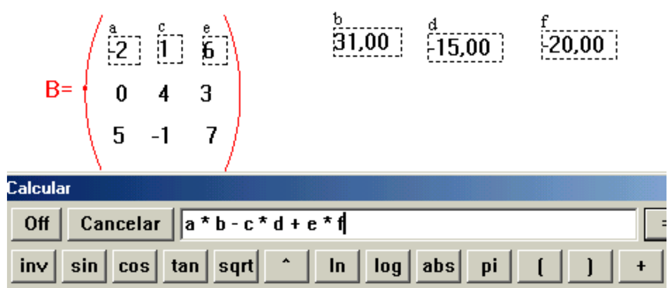


Determinantes de orden superior.

Utilizando la macro recién construida, podemos construir una nueva macro que calcule el determinante de una matriz de tamaño 3 por 3. La siguiente fórmula nos da esa posibilidad:

$$\Delta = a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\Delta_{1,3}$$

en donde los determinantes $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{1,2}$ y $\Delta_{1,3}$ son determinantes de orden dos obtenidos de la matriz original, simplemente eliminando el renglón y columna indicados por los subíndices. Como paso intermedio, deben calcularse entonces los determinantes $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{1,2}$ y $\Delta_{1,3}$, para poder utilizar entonces a las entradas del primer renglón como los coeficientes de la fórmula descrita.



Los determinantes de matrices 4 por 4, 5 por 5 y subsecuentes requieren de un paso anterior para ser definidos bajo este esquema de construcción de definiciones. Esto es, definir el determinante de una matriz 7 por 7 requiere definir el determinante para una matriz 6 por 6, etc.

Bibliografía

Laborde, C. (1994). *Enseigner la géométrie : permanences et révolutions.* Bulletin APMEP, no. 396, pp. 523 – 548.

Laborde, J.M. & Bellemain, F. (1992). *Cabri Géomètre II. Educational Software* © Université Joseph Fourier, Grenoble. Texas Instruments. Dallas.

LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DESDE UN PUNTO DE VISTA GEOMÉTRICO.

Maestro Alfonso Ledesma Ruiz
Universidad del Valle de Atemajac.
Guadalajara Jalisco México.
alfonso.ledesma@univa.mx

Si usamos programas como el CABRI para hacer visuales e interactivas las propiedades de los números, nuestra práctica docente será más atractiva y eficiente.

El caso que nos ocupa es una actividad que propone el libro de Swokowski, que es hacer un dibujo que demuestre la aplicación de la propiedad asociativa de la multiplicación.

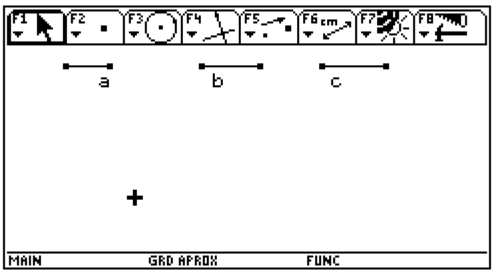
Dentro de las muchas actividades que podemos hacer con la calculadora, está el programa Cabri que ayuda a los alumnos a interactuar con la geometría de una manera muy atractiva. En este ejercicio que propongo los alumnos al llegar al final de la construcción de las figuran logran el conocimiento significativo de la propiedad asociativa así como la habilidad para el manejo del programa Cabri.

El posesor irá describiendo cada uno de los pasos a realizar en la calculadora y deberá utilizar alguna herramienta didáctica para hacer visible por todos los alumnos la pantalla de su calculadora (TI Presenter, View Screen etc.)

Se recomienda no usar esta dinámica si es la primera vez que se maneja una clase grupal con calculadora ya que los alumnos deben contar con cierta habilidad para el manejo del programa. Esto me lo dice la experiencia ya que en grupos donde no hay mucha experiencia en el manejo de la calculadora, la atención de los alumnos se disipa y no se puede avanzar hacia el objetivo final.

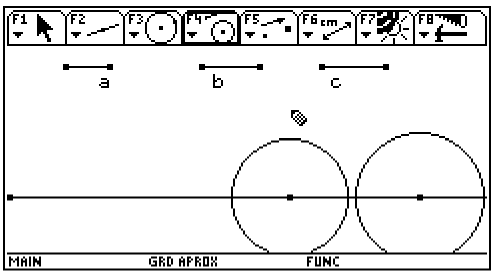
El objetivo es comprobar que: $ab + ac = a (b + c)$

Bien pues explicaremos el procedimiento para la dinámica.

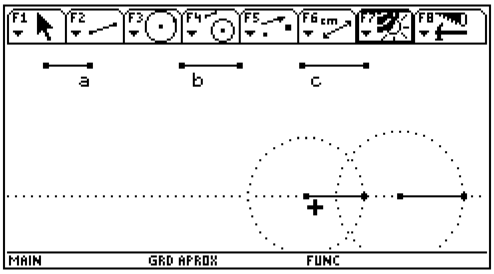


En la pantalla del Cabri dibujamos tres segmentos de tamaño indefinido.

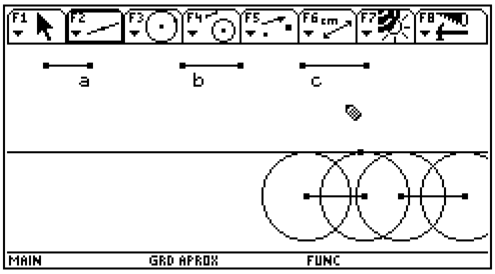
Colocamos tres etiquetas con letras que señalen cada segmento.



Trazamos una recta en la parte inferior de la pantalla y dibujamos dos círculos con el compás de radio "b" y "c"



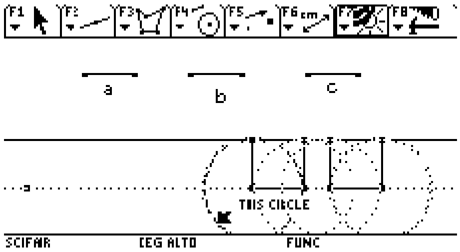
Con segmentos remarcamos los radios de ambas circunferencias y ocultamos la recta y los círculos.

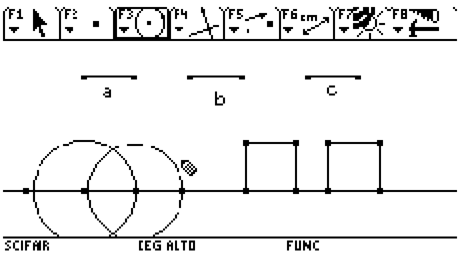


Ahora construimos 4 circunferencias de radio "a" en los extremos de los segmentos y una recta tangente a ellas.

Con polígonos construimos 2 rectángulos que medirán "a" por "b" y "a" por "c"

Ocultamos las circunferencias y veremos Solo los rectángulas hechos y una línea.

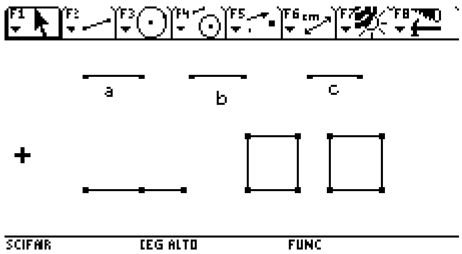


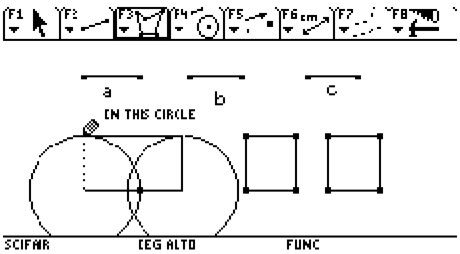


Después construiremos otro rectángulo donde la base será "bc" de la siguiente forma

Trazamos dos circunferencias, la primera de radio "b" y la segunda unida a la primera de radio "c"

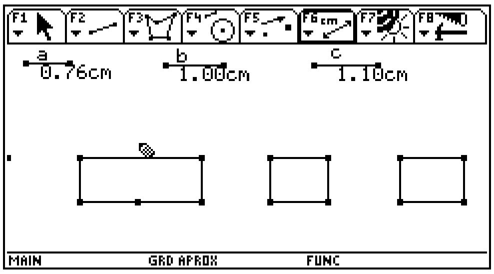
Trazando los segmentos en los radios y ocultando las circunferencias y la recta la imagen nos queda asi:

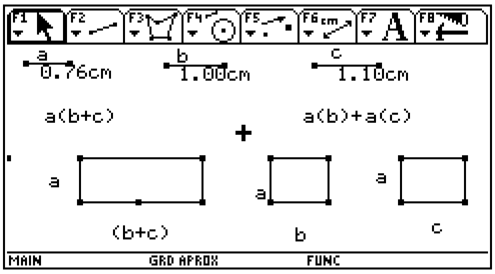




Con el compás tomamos la medida del segmento "a" y dibujamos dos circunferencias en los extremos de los segmentos unidos. Con un polígono construimos el rectángulo base "bc" y altura "a", ocultamos las circunferencias.

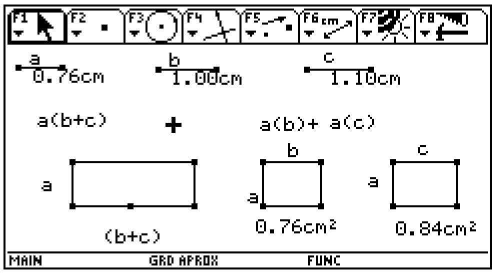
Colocamos las medidas de los segmentos

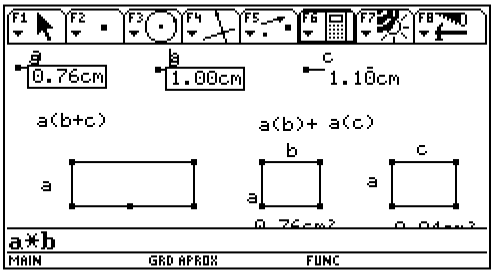




Con comentarios escribimos las operaciones e indicamos la letra de cada lado.

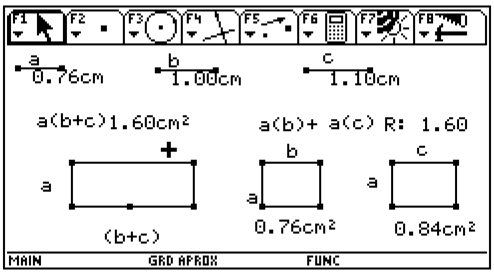
La calculadora nos da con F6 área automáticamente el área de los polígonos.





Con la calculadora del Cabri que esta en F6 “calcular” obtenemos el área del tercer polígono:

a *(b+c) enter.



Podemos comprobar de diversas formas que a (b + c) = a(b)+a(c) sumando áreas o bien realizando multiplicaciones con las longitudes de los segmentos .

Los alumnos desarrollan su creatividad y algunos hasta realizan animaciones para poder mover los segmentos y así observar que sin importar las magnitudes de los segmentos la propiedad sigue siendo valida.

Taller de Ecuaciones Diferenciales en Cabri

Julio Antonio Moreno Gordillo
Julio.Moreno@imag.fr
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez,
Tesista en la Universidad Joseph Fourier

Resumen

En este escrito se muestran algunas aplicaciones posibles de Cabri en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, las cuales han surgido en el contexto de un proyecto de investigación cuyo objetivo es estudiar las concepciones de los estudiantes sobre las nociones asociadas al campo conceptual de las ecuaciones diferenciales.
En primer lugar se describen algunas características de la enseñanza actual de la disciplina de interés. Enseguida se presenta una serie de actividades sobre diferentes tópicos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Al final en las conclusiones se esbozan resultados preliminares de la puesta en escena de algunas de estas actividades.

1. Introducción.

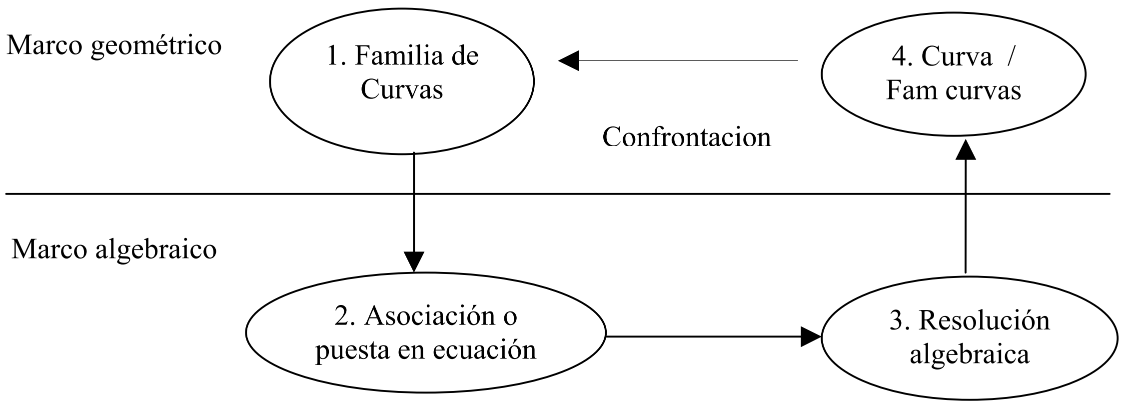
Desde sus inicios, las ecuaciones diferenciales se han desarrollado en los marcos algebraico, numérico y geométrico, sin embargo la enseñanza tradicional ha privilegiado el estudio de los métodos algebraicos de resolución exacta. Este énfasis a un solo marco produce en los estudiantes una visión restringida e insatisfactoria de este campo de estudio (Artigue, 1992; Boyce, 1994).

El hecho de que el ambiente de geometría dinámica Cabri facilite la interacción de los diferentes marcos asociados a las ecuaciones diferenciales (Díaz Barriga & Sandoval, 2001; Moreno & Laborde, 2003; Arslan & Laborde, 2003), nos ha conducido a interesarnos en el desarrollo de «medios» (Laborde, 1994) posibles para organizar situaciones relacionadas con estos saberes que favorezcan una diversidad de puntos de vista, provoquen la movilización de diferentes nociones que les son asociadas y obliguen a un trabajo de interpretación en términos matemáticos de los hechos experimentales.

2. Actividades propuestas.

2.1 Articulación familia de curvas – ecuación diferencial

Con el fin de favorecer el desarrollo de un proceso experimental en el estudio de las ecuaciones diferenciales, se diseñaron actividades para asociar familias de curvas con ecuaciones diferenciales y para poner en ecuación una familia de curvas, de acuerdo al esquema siguiente:

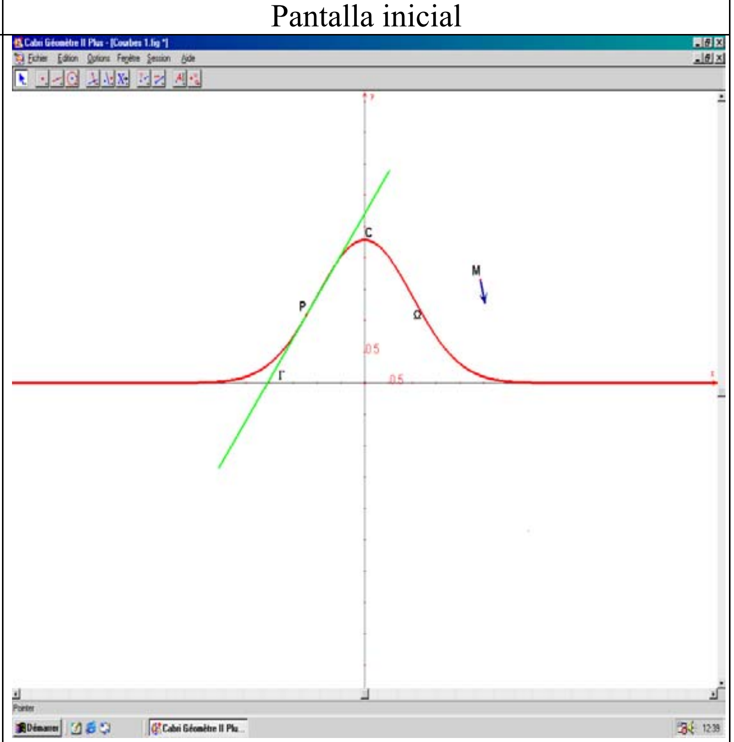


Las actividades comienzan con un trabajo exploratorio en Cabri, seguidas de una fase de trabajo en el marco algebraico y finalizan con un regreso al ambiente informático para actividades de trazo y verificación. Si los resultados no son los esperados, el proceso puede reiniciarse.

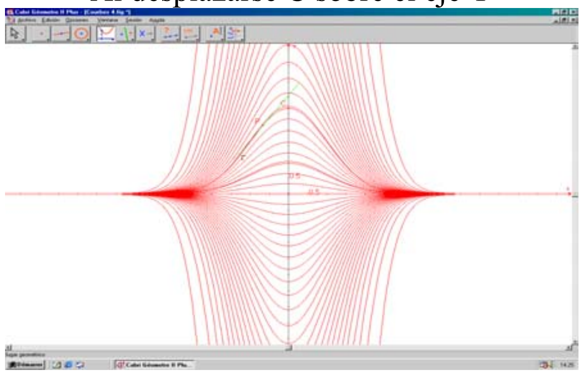
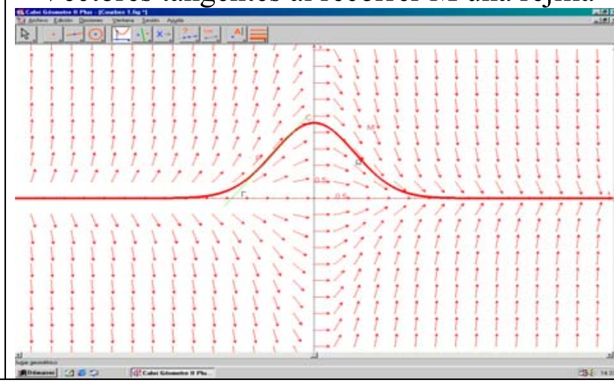
2.1.1 Asociación familia de curvas – ecuación diferencial

En estas actividades, se espera que como resultado del trabajo exploratorio en la familia de curvas, la identificación de propiedades tales como simetrías, monotonía, extremos relativos, etc., interpretadas algebraicamente, conduzca a elegir la ecuación diferencial correspondiente.

Ejemplo:

Enunciado de la actividad	Pantalla inicial
La curva Ω se desplaza por medio del punto C. La recta Γ tangente a Ω en P se desplaza sobre la curva. El vector desplazable de origen M, es tangente a las curvas Ω. Dada las ecuaciones siguientes: A) $y' =- a\,(x+y)$; B) $y' =- b\,(x-y)$; C) $y' = -m\,xy$; D) $y' = -n\,x/y$; a, b, m, n elementos de R^+ 1) Elegir, sin integrar, la que corresponde a la familia de curvas Ω, 2) Justificar la elección hecha, 3) Resolver la ecuación diferencial seleccionada y trazar en Cabri la que pasa por el punto (-2,0), 4) Verificar de dos formas diferentes que la curva trazada es efectivamente la que se solicito.	

Pantallas posibles

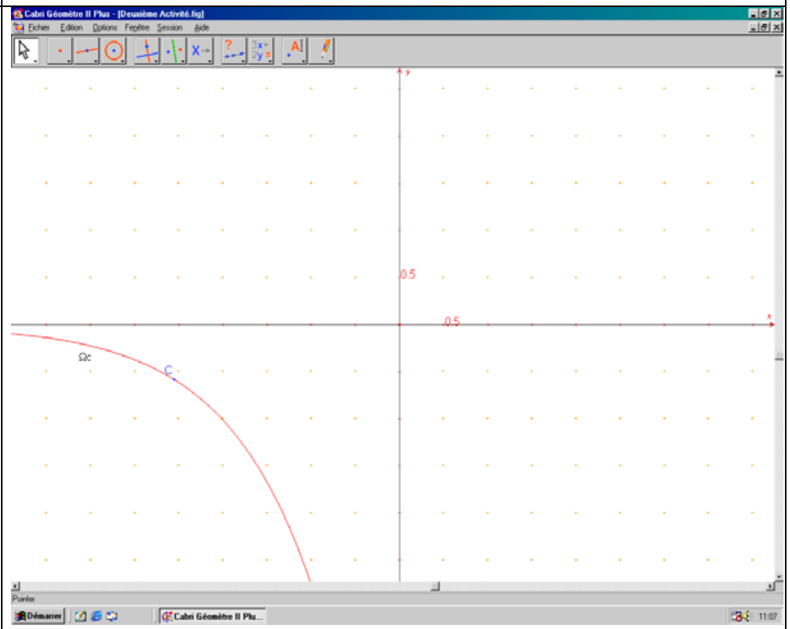
<table>
<tr><td colspan="2">Lugares geométricos</td></tr>
<tr><td>Al desplazarse C sobre el eje Y
</td><td>Vectores tangentes al recorrer M una rejilla
</td></tr>
</table>

2.1.2 Puesta en ecuación de una familia de curvas

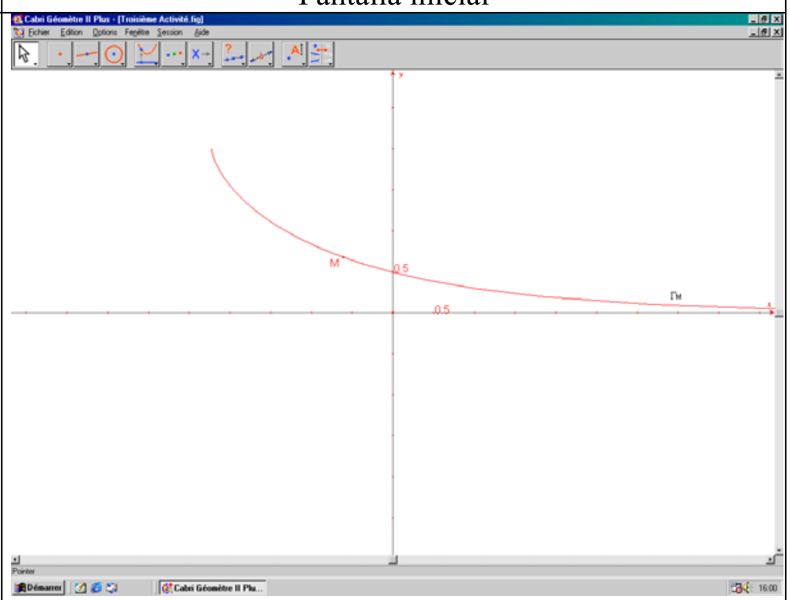
Los problemas relativos a la puesta en ecuación de una familia de curvas, son comunes en los cursos de ecuaciones diferenciales, tienen la ventaja de que no requieren de conocimientos extramatemáticos para abordarlos. Se han elegido las exponenciales y las tractrices, debido a que estas pueden caracterizarse por invariantes geométricos relacionados con la recta tangente a las curvas solución. Las exponenciales se distinguen por tener subtangentes constantes, y las tractrices por tener un segmento de la tangente constante.

Se espera que como resultado del trabajo exploratorio con la familia de curvas se llegue a la escritura de la ecuación diferencial que le es asociada, movilizando alguna de las siguientes estrategias: asociación de una expresión algebraica a las curvas, constatación de una relación numérica entre la pendiente de la recta tangente y las coordenadas del punto de contacto, o la identificación del invariante geométrico y su correspondiente matematizacion.

Familia de exponenciales

Enunciado de la actividad	Pantalla inicial
La curva Ω_C es desplazable en C: 1) Encontrar la ecuación diferencial de primer orden de la familia de curvas, 2) Justificar que la ecuación encontrada corresponde bien a la ecuación de la familia de curvas, 3) Resolver la ecuación y trazar la curva que pasa por el punto (0,2), 4) Verificar de dos formas diferentes que la curva trazada es la que efectivamente se les solicito.	

Familia de tractrices

Enunciado de la actividad	Pantalla inicial
La curva Γ_M es desplazable en M: 1) Encontrar la ecuación diferencial de primer orden de la familia de curvas, 2) Justificar que la ecuación encontrada corresponde bien a la ecuación de la familia de curvas, 3) Resolver la ecuación y trazar la curva que pasa por el punto (0,1), 4) Verificar de dos formas diferentes que la curva trazada es la que efectivamente se les solicito.	

2.2 Articulación vectores tangentes variables – ecuaciones diferenciales

Esta actividad consiste en asociar vectores tangentes variables previamente construidos y ecuaciones diferenciales de la forma $y'=f(x,y)$. Se trata de relacionar las características

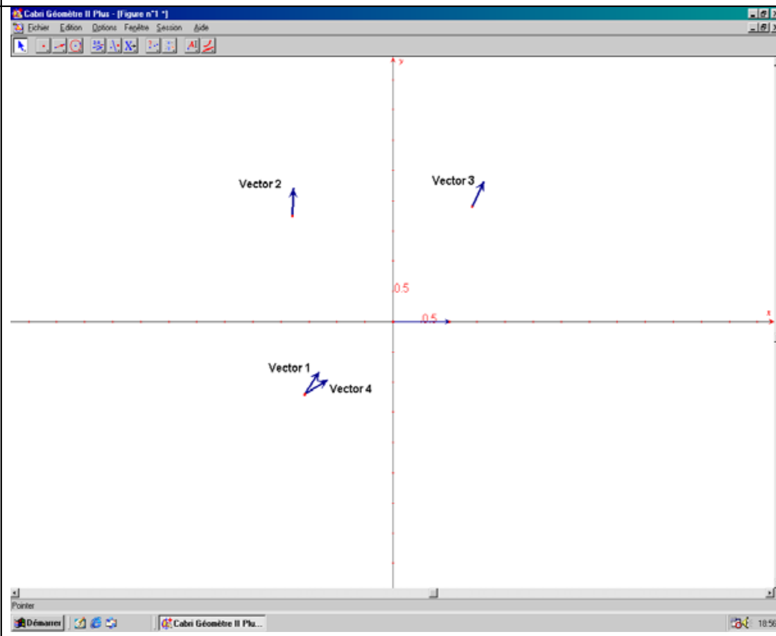
geométricas asociadas a los vectores con las características algebraicas de la ecuación diferencial.
Así por ejemplo si un vector no cambia al ser desplazado sobre una recta paralela al eje vertical, entonces esta asociado a una ecuación diferencial de la forma $y'=g(x)$, si un vector permanece horizontal sobre una recta $y=b$, entonces ($y-b$) es un factor de $f(x,y)$, etc.

Ejemplo:

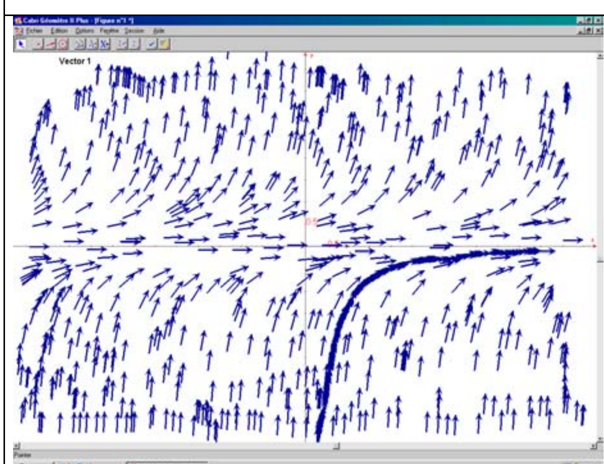
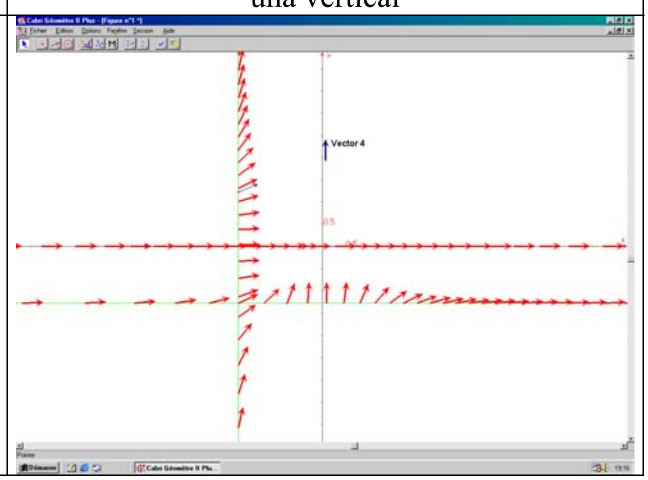
<table>
<tr><th>Enunciado de la actividad</th><th>Pantalla inicial</th></tr>
<tr><td>Cada uno de los 4 vectores variables es tangente a las curvas solución de una ecuación diferencial de primer orden.

Asociar a cada vector la ecuación que le corresponde y justificar la respuesta

1) $y'=-ay$, 2) $y'=b\,y^2/x^2$,
3) $y'=ce^{x^2}$, 4) $y'=d(x^2+y^2)$,
5) $y'=h\,y^2$, 6) $y'=k(x+y)$, 7) $y'=m\,x^2$

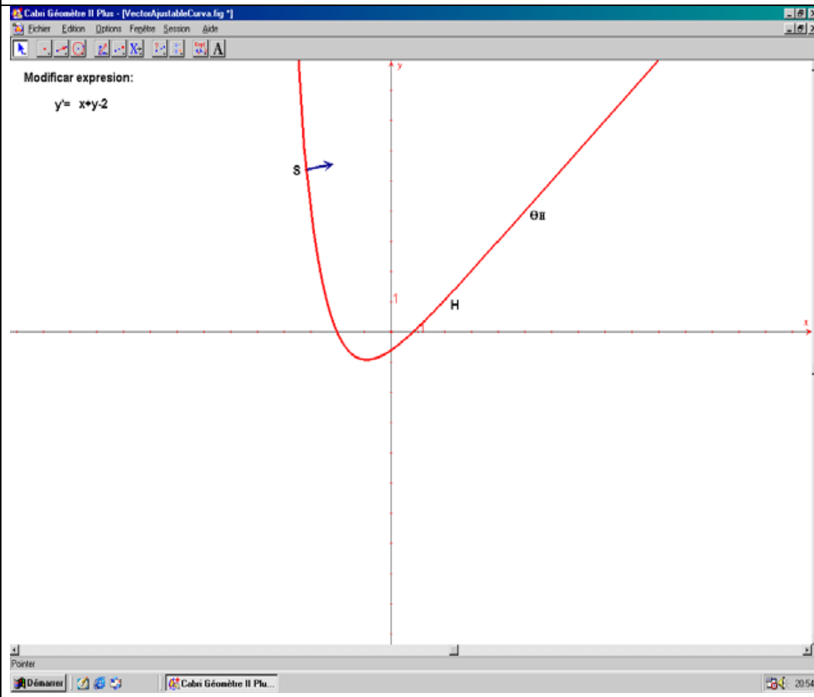
$a, b, c, d, h, k, m \in \Re^+$.</td><td>
</td></tr>
</table>

Pantallas posibles

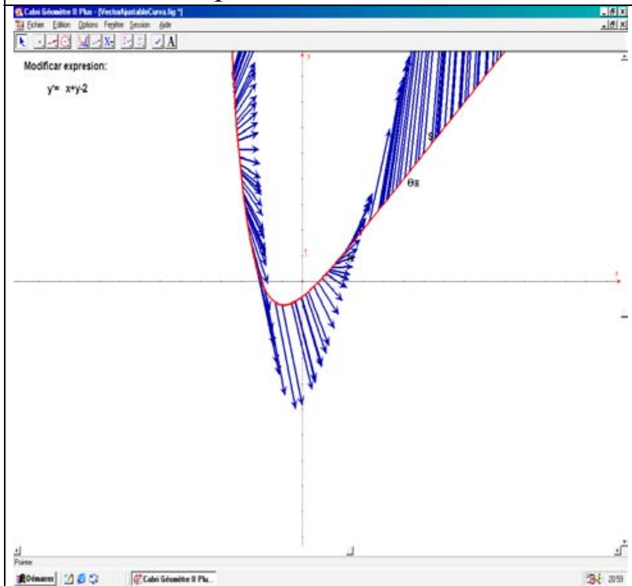
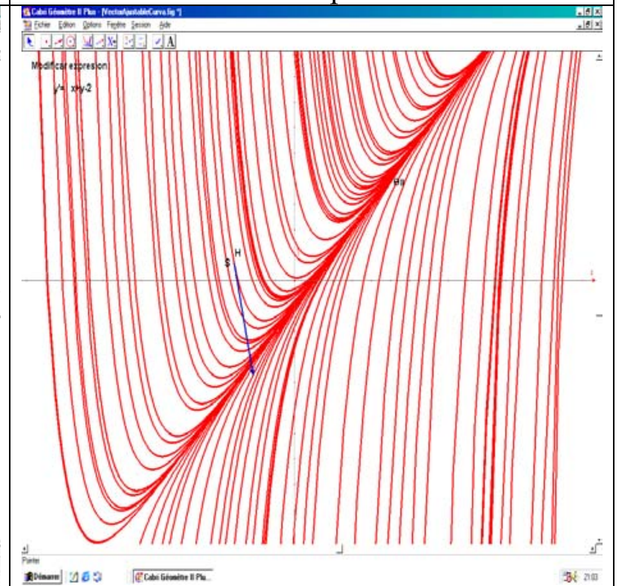
<table>
<tr><th>Campo de vectores asociado al vector 1</th><th>El vector 4 cambia sobre una recta horizontal y una vertical</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

2.3 Coordinación expresiones algebraicas – vectores variables – familia de curvas

Se trata en este tipo de actividades de escribir la ecuación diferencial que produzca un vector tangente a la familia de curvas, lo cual deberá validarse mediante el desplazamiento tanto del vector sobre una curva como el desplazamiento de la curva. Se espera que la implementación de estrategias numéricas, que pongan en evidencia alguna relación entre las coordenadas del punto inicial del vector y la pendiente del vector, o el recurso a la puesta en relación de las propiedades geométricas tanto de los vectores tangentes como de la curva conducirán al logro de la tarea.

Enunciado de la actividad	Pantalla inicial
La curva Θ_H es desplazable por medio del punto H. El vector de origen S es desplazable sobre la curva. La tarea consiste en encontrar la expresión de la ecuación diferencial para la cual el vector de origen S, es siempre tangente a cualquier curva Θ_H, para todo punto S de la curva. Justifique su respuesta.	

Pantallas posibles

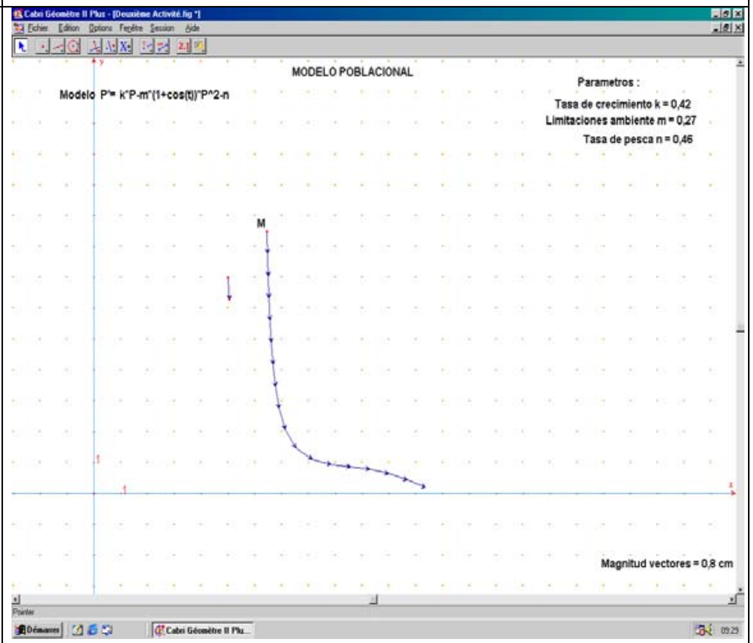
Traza del vector de origen S cuando S se desplaza sobre la curva	Traza de la curva Θ_H cuando H se desplaza sobre el plano
	

2.4 Estudio de un modelo evolutivo

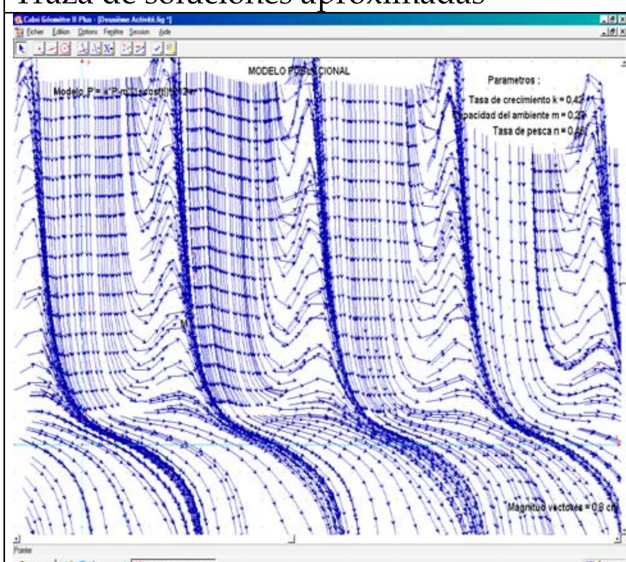
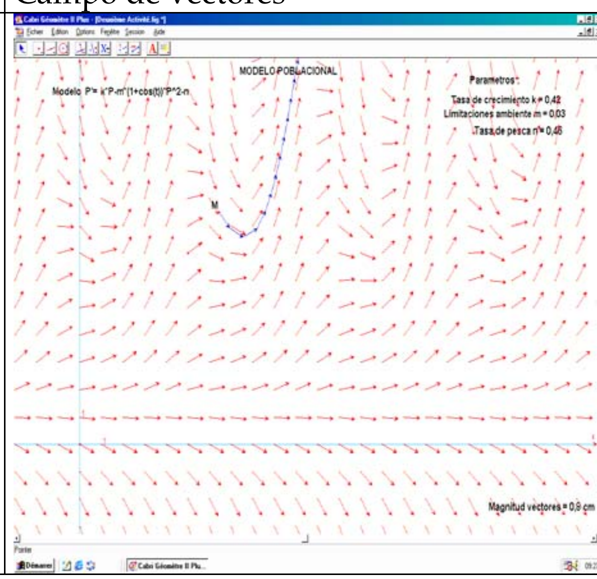
En esta actividad se trata de evidenciar la influencia del cambio de valores en los parámetros de un modelo particular en la evolución del sistema modelizado.

Ejemplo

Las ecuaciones diferenciales como $\frac{dP}{dt}=a(t)P+b(t)P^2+c(t)$, pueden ser interpretadas en términos de dinámica de poblaciones: donde $a(t)$ representa la tasa de crecimiento natural; $b(t)$ representa (si es negativo) las limitaciones del ambiente y $c(t)$ representa la inmigración (si es positivo) o la caza/pesca (si es negativo).

<table>
<tr><th>Enunciado de la actividad</th><th>Pantalla inicial</th></tr>
<tr><td>Se muestra una solución aproximada de la ecuación
$\frac{dP}{dt}=kP-m(1+\cos t)P^2-n$
Los parámetros son modificables y el punto M desplazable:
1) Describa la evolución de la población,
2) Que sucede cuando t $\to \infty$?
3) Es posible encontrar valores de parámetros que aseguren la supervivencia de la población?
4) Si existen esos valores, hasta que punto es posible modificar uno de ellos, por ejemplo, la tasa de pesca sin poner en riesgo a la población?</td><td>
</td></tr>
</table>

Pantallas posibles

<table>
<tr><th>Traza de soluciones aproximadas</th><th>Campo de vectores</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(En cada pantalla se hizo una elección particular de valores de los parámetros)

3. Conclusiones.

La puesta en escena de las actividades 2.1.1, 2.1.2 y 2.2 o alguna variante de ellas, con estudiantes mexicanos y franceses (Moreno y Laborde, 2003; Arslan y Laborde 2003), ha permitido dar elementos para constatar que:

- Existe una tendencia generalizada de los estudiantes en intentar, como primera estrategia para articular los marcos geométrico y algebraico, hacer primero un trabajo algebraico tal como resolver la ecuación diferencial para enseguida hacer las articulaciones con el marco geométrico. Se ve en esto el efecto de una enseñanza centrada en el marco algebraico. Sin embargo el bloqueo a estas estrategias, utilizando por ejemplo coeficientes literales o trabajando inicialmente con la familia de curvas sin dar una expresión algebraica, muestra que es posible inducir a los estudiantes a razonar a partir de los hechos geométricos y luego a vincularlos con las características algebraicas de las expresiones o a interpretarlos algebraicamente.
- Las características especificas de Cabri pone a disposición de los usuarios ciertas herramientas que no son disponibles en un ambiente papel/lapiz. Por ejemplo, facilita la construcción del campo de pendientes de una ecuación diferencial o de la traza de un vector, permite construir sin dificultad una solución aproximada, etc. Asimismo este tipo de especificidades del ambiente de geometría dinámica, ha permitido la concepción de tareas nuevas, tales como el iniciar con un trabajo exploratorio con vectores o curvas, sobre el cual la interpretación matemática de las características geométricas de las construcciones obligan a una articulación entre los marcos geométrico y algebraico.
- La articulación de marcos favorece la emergencia de nuevos razonamientos en los estudiantes, por ejemplo para asociar vectores variables con ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x,y)$, aplicaron implícitamente reglas como:
  - **R.1.** Cuando el vector permanece sin cambio sobre una recta vertical (respectivamente horizontal), esta asociado a una ecuación diferencial que depende únicamente de x (resp. de y). En el caso contrario, esta asociado a una ecuación que depende de las dos variables.
  - **R.2.** Cuando hay una anomalía sobre una recta o si en ella el vector permanece vertical, entonces $f(x,y)$ no esta definida sobre esta recta.
  - **R.3.** Si el vector tangente es de pendiente positiva (resp. negativa), entonces esta asociado a una ecuación diferencial para la cual y' es positiva (resp. negativa).
  - **R.4.** Vectores horizontales, se asocian a los ceros de la derivada. Por ejemplo, si sobre $y = 5$ el vector es horizontal, se debe buscar la ecuación para la cual y' se anula en $y = 5$.

Referencias bibliograficas

Arslan S., Laborde C., (2003), *UN OUTIL FAVORISANT L'INTERACTION ENTRE CADRES : CABRI. Un étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles*. Actes du Congrès Europèen ITEM, Reims France.

Artigue, M. (1992). «Functions from an Algebraic and Graphic Point de View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices», In G. Harel et al. (Eds) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 109-132. MAA Notes Number 25.

Boyce W. (1994). «New Directions in Elementary Differential Equations», *The college mathematics journal*, Vol. 25, No. 5, p. 364-371.

Diaz Barriga E., Sandoval I., (2001), *Differential equations of First Order: A pedagogic application with Cabri Geometry*. Actes CabriWorld 2001, Montreal Canada

Laborde C. & Capponi B. (1994). «Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14, n° 1.2, p. 165-210.

Moreno J., Laborde C., (2003), *Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique*. Actes du Congrès Europèen ITEM, Reims France.

La Geometría del Táxi en Cabri

Augusto J.M. Wanderley, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil
José Paulo Carneiro, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

1. Introducción

Una pareja quiere comprar su casa en una gran ciudad. El marido trabaja en el punto *A* de la ciudad y la esposa en el punto *B*. ¿Donde debe la pareja escoger su residencia *P* de modo que la suma de las distancias a los dos locales de trabajo sea mínima?

En la Geometría Euclidea, este problema es fácil. Representando por $d_E(A;B)$ la distancia euclídea usual entre los puntos *A* y *B*, entonces, por la desigualdad triangular, la suma $d_E(A;P)+d_E(P;B)$ nunca es inferior a $d_E(A;B)$, y este valor mínimo es alcanzado cuando *P* pertenece al segmento $\overline{AB}$. Por lo tanto la pareja puede escoger para vivir cualquier punto del segmento $\overline{AB}$.

Pero hay aquí un problema. ¿Habrá residencias en el segmento $\overline{AB}$? Solo si el diseño de las calles de la ciudad lo permite. Si, por ejemplo, la ciudad, o por lo menos una parte de ella, fue planeada de modo que sus calles son paralelas o perpendiculares, puede ser que no haya residencias en el segmento $\overline{AB}$. En la Figura 1, por ejemplo, el menor recorrido entre *A* y *B* no es el segmento usual $\overline{AB}$, sino el camino $\overline{AC}+\overline{CB}$, u otros caminos equivalentes, como $\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FB}$.

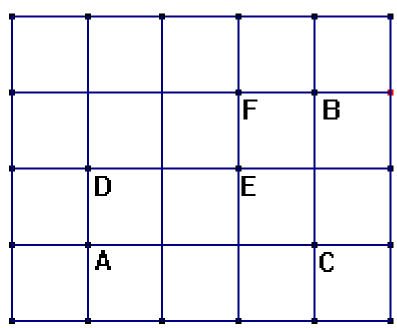


Figura 1

Para tratar de geografía urbana, un modelo conveniente es la llamada "Geometría del Táxi" (GT), que recibe este nombre porque las distancias recorridas en una ciudad por un táxi son más próximas de estas que de las distancias euclideas.

El estudio de la Geometría del Táxi (GT) se ha revelado de utilidad en la enseñanza de la geometría, como un ejemplo muy accesible de una geometría no euclidea (Krause 1975), y sigue siendo objeto de constantes investigaciones (So 2002).

En la GT, fijado un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, las rectas y los ángulos son los mismos que en la Geometría Euclidea (GE), pero la distancia entre los puntos $A=(x_A;y_A)$ y $B=(x_B;y_B)$ es dada por $d_T(A;B)=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|$.

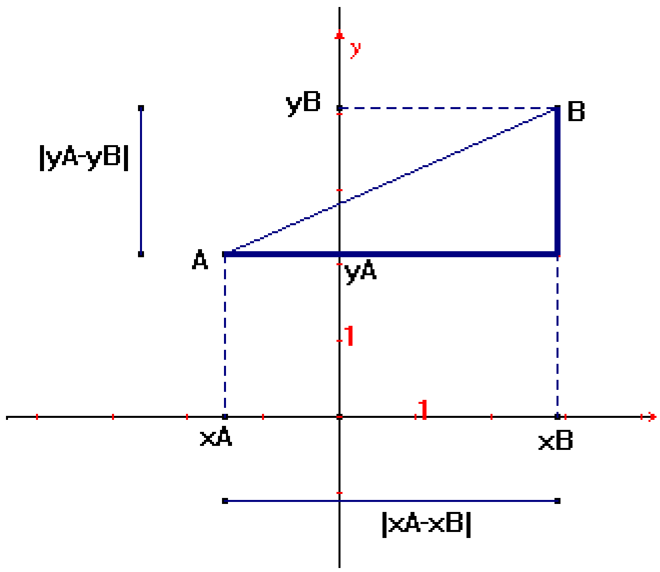


Figura 2

El presente taller tiene por objetivo investigar la GT usando la Geometría Dinámica ofrecida por Cabri. Por el carácter investigativo propio de un taller, este texto, em su primera parte, no da las respuestas a todas las cuestiones que propone, sino que es solamente un guía para estudio. La parte final (Sugestiones y comentarios) solo debe ser leída después de la investigación.

2. Tareas de Investigación

2.1. El taxi-compás

Las construcciones básicas en una geometría métrica se apoyan en la regla y el compás. La regla no ofrece problema, puesto que las rectas de la GT son las mismas que en la GE. Nuestra primera tarea es fabricar el taxi-compás.

La taxi-circunferencia $K_T(C;r)$, de centro *C* y radio *r*, es el lugar geométrico de los puntos *P* que distan *r* del punto *C*. Siendo $C=(x_C,y_C)$, el punto $P=(x;y)$ pertenece a $K_T(C;r)$ si y solo si $|x-x_C|+|y-y_C|=r$.

En particular, la ecuación de la taxi-circunferencia $K_O(C;r)$, de centro en el origen *O* del plano coordenado y radio *r* es $|x|+|y|=r$.

Tarea 1: Construir una macro que calcula la taxi-distancia entre dos puntos del plano coordenado.

Tarea 2: Construir la taxi-circunferencia de centro en el origen y radio dado (como una edición numérica).

Tarea 3: Construir la taxi-circunferencia de centro en un punto dado y radio dado (como una edición numérica). Hacer la macro correspondente.

Tarea 4: Construir la taxi-circunferencia de centro en un punto dado y pasando por un punto dado. Hacer la macro correspondiente.

Tarea 5: La herramienta "Compás" de Cabri permite construir una circunferencia euclidea de centro en un punto dado y con radio igual a un segmento dado (verifique). ¿Es posible fabricar una herramienta análoga para la taxi-circunferencia?

Tarea 6: Investigar la intersección de una reta con una taxi-circunferencia.

Tarea 7: Investigar la intersección de dos taxi-circunferencias.

Tarea 8: Considerar las circunferencias K_1, de centro $(0;0)$ y radio 2, y K_2, de centro (2;1) y radio 1. a) Contruirlas en Cabri; b) Verificar por el Álgebra que su intersección es un segmento de recta.

2.2. La taxi-distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es la menor distancia de este punto a un punto de la recta. En GE, es muy conocido que la distancia del punto *P* a la recta *r* es la distancia de *P* al pie de la perpendicular por *P* a *r*.

Tarea 9: Investigar la taxi-distancia de un punto a una recta.

Tarea 10: Hacer una conjetura sobre una fórmula para la taxi-distancia de un punto a una recta y verificar por Álgebra la validad de la fórmula.

2.3. La taxi-mediatriz

La mediatriz de un par de puntos A, B (o de un segmento $\overline{AB}$) es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B. En GE, es muy conocido que la mediatriz es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$.

Tarea 11: Investigar la taxi-mediatriz de $\overline{AB}$.

Tarea 12: Verificar por Álgebra las diversas formas que asume la taxi-mediatriz según las posiciones del segmento $\overline{AB}$.

2.4. La taxi-elipse

En la GE, la elipse de focos A y B y eje mayor $2a$ es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma de las distancias de *P* a A y *B* es $2a$. Su forma, sus propiedades y su importancia son bien conocidas, así como de las otras cónicas, como la parábola y la hipérbole. Las taxi-cónicas han sido ampliamente estudiadas (So 2002). En la GT, dados los puntos A y B y un número *r* (en un plano coordenado), la taxi-elipse de focos *A* y B y parámetro *r* es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que la suma de las distancias de *P* a *A* y *B* es *r*.

Tarea 12: Investigar la taxi-elipse, dados los focos y el parámetro.

Tarea 13: Verificar por Álgebra las diversas formas que asume la taxi-elipse, según las posiciones de los focos.

3. Sugestiones y comentarios

3.1. El taxi-compás

La construcción de la taxi-circunferencia no presenta dificultad.

Se puede observar que la ecuación $|x|+|y|=r$, de la taxi-circunferencia de centro en el origen *O* del plano coordenado y radio *r*, no se altera si cambiamos *x* por $-x$ o y por $-y$, lo que significa que su gráfico es simétrico respecto a los ejes coordenados y al origen. Es suficiente, por lo tanto, construirlo en el primer cuadrante, donde se reduce al segmento de la recta $x+y=r$ contenido en este cuadrante.

El caso general de la taxi-circunferencia de centro C y radio r, con ecuación $|x-x_C|+|y-y_C|=r$, pude ser obtenido de la anterior por traslación según el vector $(x_C;y_C)$. Por supuesto, se puede también construir directamente el cuadrado resultante.

La cuestión levantada en la Tarea 5 es interesante. La longitud de un segmento, dada por Cabri, es la distancia euclidea entre los extremos del segmento. Observar que, en GT, la distancia depende de la pendiente del segmento.

La intersección de dos taxi-circunferencias levanta una cuestión delicada y muy importante. La intersección de dos taxi-circunferencias (que son cuadrados euclideos) no siempre se reduce a uno o dos puntos, pero ocasionalmente es todo un segmento euclideo (Wanderley et al. 2004), como comprueba la Tarea 7, y Cabri no está directamente preparado para esto. Como las construcciones geométricas usuales se basan en la regla y el compás, o sea, en las intersecciones de rectas y circunferencias, este es un punto que debe ser tratado con especial cuidado en la GT.

La GT tiene muchas propiedades en común con la GE. La desigualdad triangular se cumple, las rectas y ángulos son los mismos, cada recta posee un sistema de coordenadas, etc. Pero en otras propiedades, ellas difieren. Por ejemplo, para tres puntos A, B y C, la igualdad $d_E(A;B)=d_E(A;C)+d_E(C;B)$ se cumple, en la GE, si y solo si los tres puntos son colineales y C está entre A y B. Sin embargo, en la GT, si la recta por A y B no es paralela a uno de los ejes coordenados, $d_T(A;B)=d_T(A;C)+d_T(C;B)$ se cumple para todos los puntos del rectángulo que tiene A y B como vértices opuestos. Esto puede pasar porque, en la GT, los sistemas de coordenadas sobre cada recta dependen de las pendientes de estas rectas (Martin 1972).

El comportamiento raro de la intersección de dos circunferencias choca a la primera vista, pero este mismo choque tiene un valor muy importante para mejorar el espíritu crítico de los estudiantes y profesores. Es sabido que en una de las primeras demostraciones de sus Elementos, Euclides usa la existencia de un punto de intersección de dos circunferencias, sin que un axioma anterior lo garantice. El teorema que dice que la intersección de dos circunferencias tiene al máximo dos puntos se cumple en toda "geometría neutra" (Martin 1972). La GT no es una geometría neutra, por no cumplir con los casos de congruencias de triángulos.

3.2. La taxi-distancia de un punto a una recta

Una manera convincente de investigar la taxi-distancia de un punto a una recta es usar una taxi-circunferencia con centro en el punto y radio variable, hasta "tocar" en la recta. Esto va a sugerir como esta distancia varía según la pendiente de la recta (Wanderley et al. 2003).

La fórmula algebraica es un interesante ejercicio de manipulación del valor absoluto.

3.3. La taxi-mediatriz

La investigación de la taxi-mediatriz usa la intersección de dos taxi-circunferencias y necesita de los mismos cuidados. Las conclusiones son sorprendentes. Atención especial debe ser dada al caso en que el segmento $\overline{AB}$ tiene pendiente 1 o -1, cuando se constata que la taxi-mediatriz es una unión de cuadrantes.

Para la construcción de la taxi-mediatriz en Cabri, puede ser necesaria la utilización de construcciones condicionales, lo que, por si solo, es un tema palpitante (Alice; Monrocq).

3.4. La taxi-elipse

Valen para la taxi-elipse observaciones análogas a las hechas para la taxi-mediatriz sobre el uso de la intersección de dos taxi-circunferencias para la investigación y el uso de construcciones condicionales.

Invitamos los estudiantes y profesores a investigar también las otras taxi-cónicas, como la taxi-parábola y la taxi-hipérbole, cuyas definiciones son las que se imponen naturalmente (ver So 2002).

4. Consideraciones finales

La experiencia en clases ha mostrado que el estudio de una situación no usual como la Geometría del Táxi, fuera de la ruta común, incentiva los estudiantes a investigar problemas originales y desafiantes y a desarrollar su espíritu crítico.

Referencias Bibliográficas:

KRAUSE, E.F. (1975), Taxicab Geometry, Addison-Wesley, Menlo Park, NJ

MARTIN, G. (1972), The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Intext, Educational Publishers, NY

SO, SHING S. (2002), Recent Developments in Taxicab Geometry, Cubo Matemática Educacional, Vol.4, nº2., Temuco, Chile

WANDERLEY, A.J.M., CARNEIRO, J.P., WAGNER, E. (2003), Distance from a point to a line in the Taxicab Geometry - Mathematical Spectrum 2003/2004 - Vol. 36 - Number 1 - pp. 12-16

WANDERLEY, A.J.M., CARNEIRO, J.P. (2004), O Teorema dos dois Círculos e a Geometria do Táxi, a aparecer

Alice, Géométrie Logique, http://www.cabri.net/abracadabri/GeoLogique/AliceGene.html

MONROCQ, J.C., Cabri & la géométrie Booléenne, http://perso.wanadoo.fr/jcmonrocq/

Reportes

Reportes de Divulgación

MODELACIÓN DISCRETA Y CONTINUA DE UNA CURVA PROPUESTA POR ALBERTO DURERO UTILIZANDO EL PROGRAMA CABRI

Adelina Ocaña Gómez[1]

Alberto Durero pintor Alemán, escribió hacia el año 1525 un tratado de geometría *DE LA MEDIDA*[2], que consta de cuatro libros. El Libro I presenta definiciones y la descripción de objetos geométricos de una dimensión, donde concentra su atención en la longitud. Propone nuevas construcciones que involucran la línea recta y una serie de nuevas e interesantes curvas que no habían sido hasta ese momento trabajadas, entre las cuales se encuentran espirales sencillas, adornadas, inscritas en la circunferencia o líneas helicoidales; en este primer libro se encuentra la línea curva que modelaremos con Cabri. Además de lo anterior Durero explora nuevas y originales construcciones de las cónicas, que han sido consideradas por los historiadores de la matemática como el más significativo aporte a la construcción de la matemática y por el cual el pintor ha sido reconocido en el campo de la matemática. En el Libro II Durero se ocupa de los polígonos, y plantea procesos de construcción que conducen a resultados, en algunas construcciones absolutamente precisas, ejemplo de esto es la construcción de una figura de ocho vértices (octógono) (DLM, II, pag. 193). En otros en cambio Durero no le aclara al lector que el método propuesto es apenas un método aproximado. Podemos citar, por ejemplo, la construcción del pentágono, que resulta equilátero, pero no equiángulo (DLM, II, pag. 195). En algunos casos Durero es conciente de la exactitud, en otros, hace caso omiso, no sabemos si consciente o inconscientemente. En este libro Durero plantea un método aproximados para obtener la trisección del ángulo (DLM, II, pag. 197) y de la cuadratura del círculo (DLM, II, pag. 212). Estos dos problemas hacen parte de los tres problemas imposibles de la antigüedad, en el sentido que no tienen solución con regla y compás. En el libro III Durero hace la presentación de los cuerpos aplicando la geometría a la arquitectura (construcción de pilares y columnas) y a la construcción de ejemplares para el abecedario Latino y Gótico. En la época de Durero, Alemania se encontraba interesada en perfeccionar la imprenta, por lo que la elaboración de letra especial y bonita fue para Durero una preocupación que lo llevó a destacarse en la impresión de biblias, reconocidas por la belleza de la letra con que fueron impresas. El libro IV se ocupa los cuerpos tridimensionales utilizando la perspectiva.

Alberto Durero en su libro realiza las construcciones limitadas a la regla y compás como instrumentos centrales. El grupo de trabajo de la Universidad Jorge Tadeo Lozano de Bogotá, del Departamento de Ciencias Básicas, se ha encargado de replicar, sujetos con estricto rigor a los procedimientos planteados por él, todas las construcciones propuestas. Este ejercicio ha estado caracterizado por una doble dificultad; la primera traducir el lenguaje demasiado brusco que usa Durero. La segunda , replicar en Cabri el procedimiento que respete las recomendaciones del autor.

La construcción, objeto de esta presentación, llamada por Durero “línea útil que se curva de manera peculiar” (DLM, I, pag. 159) se reconoce en el libro con la número 32. A continuación presentamos los pasos a seguir de acuerdo a la interpretación del proceso planteado en el libro. **i**. Se traza un segmento *cd* horizontal, el cual es dividido

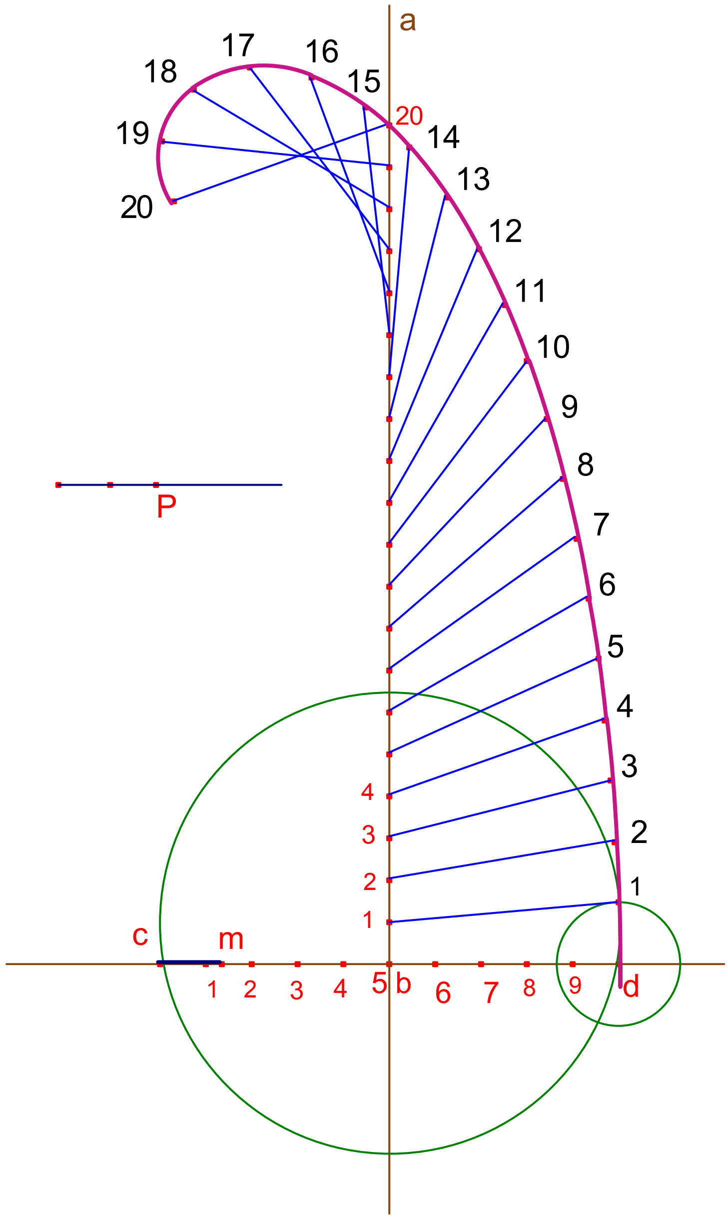
---

[1] Integrante del grupo de estudio de la Universidad Jorge Tadeo Lozano, del cual también forman parte: Carlos Alberto Cardona, Julio César Ocaña, Sonia Cubillos y Natalie Dussán.

[2] En lo sucesivo usaremos DLM para referirnos al libro DE LA MEDIDA de Durero; citaremos el libro en números romanos y a continuación la página correspondiente de la edición en español

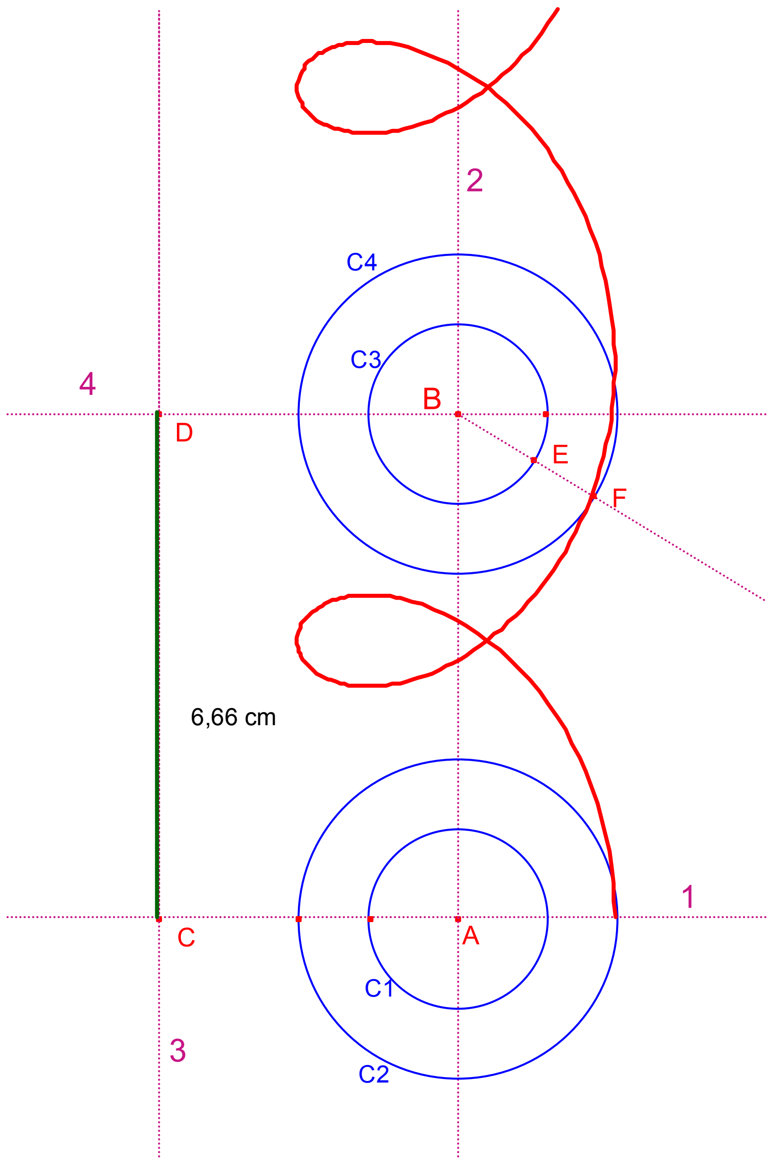
en 10 partes iguales, numerándolas a partir de la primera división 1.2, ...10. **ii.** En la quinta división se traza una línea perpendicular *ab,* la cual se divide en 20 partes iguales, numerándolas de abajo hacia arriba, 1, 2, 3,etc. **iii.** La división 1-2 de la horizontal se divide en tres partes iguales, y a la primera división se le aumenta un tercio, obteniéndose el segmento *cm*. **iv.** Con radio *cm* haciendo centro en *d* se traza una circunferencia. Con la medida *bd* se traza una circunferencia haciendo centro en el punto 1 de la recta vertical *ab*, de modo que corte la circunferencia anterior. A esta intersección se la nombra con el número *1* . **v.** Este punto se toma como centro para una nueva circunferencia de radio *cm* y desde el punto 2 de la línea vertical *ab* se traza otra circunferencia de radio *bd*. El punto de intersección de estas circunferencias es el punto *2* de la curva. Este proceso se itera para los demás puntos hasta el punto 20 de la línea vertical *ab*. Los puntos que han sido identificados en la construcción anterior como *1, 2, 3, ..., 20*, se unen con trazo continuo, obteniéndose *la línea útil que se curva de manera peculiar* .

En esta construcción se pude apreciar fácilmente que se tiene una circunferencia que se mueve verticalmente. Si modificamos la longitud del segmento *cm,* podemos ver la familia de curvas de la que Durero propone.



En muchas de las construcciones que plantea Durero, se advierte un salto enorme en el proceso, cuando propone la construcción en términos de un número finito de puntos, y al final se hace un trazo continuo que involucra, no sólo los puntos derivados de la construcción, sino infinitos puntos entre ellos asumiendo que cumplen la misma regla de construcción.
Ahora que se ha seguido el proceso planteado por Durero en su libro *DE LA MEDIDA*, es conveniente pensar la curva propuesta por Durero con una serie de puntos discretos, como la que describe el movimiento de la rueda de un tren, en el cual, la rueda interior se desliza sobre el riel, pero la rueda exterior describe una curva continua que ilustraremos, ajustándonos a un proceso que respete lo mejor que se pueda la regla de construcción.
i. Se trazan dos líneas perpendiculares *1* y *2*. **ii.** En la intersección de dichas rectas se ubica el punto A y se dibujan las circunferencias C_1 y C_2 ,concéntricas de radios diferentes. **iii.** En la línea horizontal *1* se marca un punto C y allí se traza una recta perpendicular a ella, y una semirrecta de origen C, sobre la recta. **iv.** se marca un punto D cualquiera sobre la semirrecta (este punto indicará el desplazamiento de la

circunferencia menor), y se traza el segmento CD. **v.** Se traza la paralela *4* a la recta *1* que pase por el punto D. **vi.** En la intersección de la recta *4* con la recta *2* se ubica el punto B. Con centro en B se trazan las circunferencias C_3 y C_4 de igual radio que las C_1 y C_2, respectivamente. **vii.** Se transfiere la medida del segmento CD en la circunferencia C_3 que determina el punto E, se traza la semirrecta BE. En el punto de corte con C_4 se determina el punto F, que es el que da origen a la curva continua. Con la herramienta "lugar geométrico" se traza la curva de F respecto al punto D.



En este trazado de la curva de manera continua, no se respetan las medidas propuestas por Durero, pero se puede hacer una aproximación muy cercana a la curva que propone Durero. Además de esta se obtiene la familia de curvas que cumplen con las mismas propiedades que la curva de Durero. Esta curva se le conoce con el nombre de Cicloide.

El trabajo permite aprovechar ese recurso poderoso que es la tecnología computacional para modelar el mundo. Permite recrear la obra de otros pensadores que nos muestran la belleza y la aplicación de la geometría al arte y a la ciencia.

LA EVALUACIÓN DE EMAT EN LÍNEA.

LA EXPERIENCIA DE COAHUILA.

Emilio de León Dávila
María Teresa López Hernández
Centro Siglo XXI Informática Educativa
Unidad Campo Redondo
siglo21@csxxi.sepc.edu.mx

ANTECEDENTES:

En 1999 la SEP, el ILCE, la U. A. de C., la SEPC y el Centro Siglo XXI firmaron un convenio de colaboración para implementar el programa EMAT en Coahuila en todas las secundarias de la entidad. El Programa EMAT había sido piloteado por la SEP, el ILCE y el CINVESTAV durante tres años, analizando la pertinencia y la conveniencia del modelo escogido con relación a la nueva currícula de la escuela secundaria mexicana. Para ello, tomaron en cuenta la competencia cognitiva de los estudiantes y evaluaron el aprendizaje logrado por los alumnos y la aceptación y capacidad lograda para su manejo por parte de los maestros.

ESTRATEGIA DE MASIFICACIÓN

La masificación fue posible, gracias a que en 1998 instalamos un LACES—Laboratorio de Cómputo Escolar—en todas las escuelas secundarias del Estado y se capacitaron a más de 3,500 docentes en el uso básico de los equipos. Dicha capacitación la impartimos a contra turno, en cada uno de los centros escolares, sin costo para los maestros.

A. CAPACITACIÓN EN EL PROGRAMA EMAT:

Una vez firmado el convenio, la capacitación de los maestros de matemáticas la diseñamos para que se impartiera en cascada, siguiendo la siguiente estrategia: en el mes de mayo de 1999, se ofrecieron tres cursos de sensibilización e Introducción a EMAT por parte de la SEP y del

CINVESTAV –Centro de Investigaciones Avanzadas-- de 20 horas c/u, a personal especializado de la Escuela de Matemáticas, del CIMA --Centro de Investigación de Matemáticas Aplicadas-- de la U. A. de C. y del Centro Siglo XXI, Informática Educativa. El CIMA y el Centro Siglo XXI, a su vez, capacitamos en junio del mismo año, en el Programa EMAT, a 40 instructores de todo el Estado, mediante un curso de 20 horas de Introducción a EMAT y un Taller de 40 horas para la enseñanza y la aplicación de EMAT.

Los instructores, fueron los multiplicadores del programa EMAT y capacitaron en agosto de 1999, a 820 maestros de matemáticas en todas las regiones del Estado, mediante un taller de 40 horas; durante la capacitación denominada *Inicial,* los docentes de secundaria, se empaparon de la filosofía del Programa EMAT.

Desde entonces, se han impartido cuatro cursos de Reforzamiento Técnico Pedagógico del Programa EMAT, el cual se rediseña año con año, ya que el contenido del mismo varía conforme a los resultados de la evaluación en línea que aplicamos al concluir cada año escolar. Después de que analizamos los resultados de la evaluación, informamos a los docentes el resultado obtenidos y retomamos los conceptos que los alumnos tuvieron más dificultad para resolver. Cabe aclarar, que la Universidad Autónoma de Coahuila, a través de la Escuela de Matemáticas y del CIMA-Centro de Investigación de las Matemática Aplicada- colaboraron estrechamente con el Centro Siglo XXI en el Programa EMAT, tanto en el rediseño de los Cursos como en la capacitación de los 40 Instructores, quienes a su vez, capacitan a más de 700 docentes de matemáticas en todo el Estado.

B. EVALUACIÓN.-

El Programa EMAT, en Coahuila, se ha evaluado desde sus inicios: la Universidad Autónoma de Coahuila, a través del CIMA y de la Facultad de Matemáticas, colaboró con el Centro Siglo XXI y en el ciclo escolar 1999-2000, realizaron una evaluación constante mediante encuestas, que se aplicaron a directivos, docentes y alumnos; para conocer la aceptación del Programa. Al finalizar dicho ciclo escolar, se aplicó un examen a cerca de 80,000 alumnos que fue revisada a través de lector óptico; siendo esta modalidad muy onerosa, tanto económicamente, como en tiempo y esfuerzo.

La evaluación y el análisis de los resultado los realizó la U. A. de C.; considerando los resultados mencionados, el contenido del Curso de Reforzamiento Técnico Pedagógico y la capacitación subsecuente, se llevaron a cabo en coordinación con el Centro Siglo XXI y la Secretaría de Educación Pública de Coahuila.

Concientes de que el Programa Emat debe ser evaluado en forma continua, durante los siguientes años nos vimos en la necesidad de buscar nuevas estrategias que nos permitieran aplicar exámenes a muestras significativas, de tal forma que pudiésemos obtener resultados rápidamente, con menos esfuerzo, en menor tiempo y sin tanto costo.

La mejor estrategia fue utilizar las bondades de la tecnología y aprovechar la infraestructura computacional con la que contamos.

Después de arduas investigaciones, encontramos un programa servidor de páginas web gratuito que nos permite publicar exámenes en redes locales y por Internet, y a través de un programa en ASP pudimos ligar las respuestas a una base de datos, de tal forma, que los alumnos pueden contestar su examen desde una computadora usando el navegador y, al hacer clic en enviar, sus respuestas se almacenan automáticamente en una base de datos.

Después de varias pruebas y resolver problemas específicos de configuración de redes, relacionados principalmente con el protocolo TCP/IP, decidimos diseñar una logística para aplicar los exámenes en todas las escuelas secundarias del estado.

Esta logística consistió en lo siguiente:

1. Llevamos a cabo juntas en todas las regiones del estado con los Inspectores y un Responsable de LACES por Zona Escolar, dándoles la responsabilidad de que el examen se instalara y aplicara en cada una de las escuelas a su cargo.

2. Les entregamos un instructivo para aplicar la evaluación y dos CD's, el 1º contenía el examen y el 2º de recuperación, para utilizarse en el caso de presentarse la necesidad de restaurar alguna máquina

3. Los Inspectores y Supervisores enviaron los disquetes Centro Siglo XXI, en donde los recopilamos para su análisis.

4. La información recabada la conjuntamos en una base de datos, con la cual efectuamos el análisis respectivo.

La evaluación del Programa EMAT del ciclo escolares 2000-2001, la llevamos a cabo utilizando esta modalidad, y obtuvimos una muestra de 20,000 alumnos así como una encuesta a docentes y directivos de los mismos planteles. Los resultados de esta evaluación fueron muy importantes ya que, basándonos en ellos, fue posible diseñar el Curso de Reforzamiento Técnico Pedagógico, para docentes de matemáticas del Estado; en el mismo propusimos estrategias didácticas que son aplicables tanto en el LACES como en el salón de clase, sobre todo con aquellos temas en los que los alumnos mostraban tener dificultades.

En el ciclo escolar 2001-2002 realizamos de nuevo la evaluación, en la cual recabamos una muestra de 19,838 alumnos, 86 directores y 142 maestros. Los resultados que obtuvimos, nos permitieron detectar aquellos grupos que aún no se integraban al trabajo de Emat.

En el ciclo escolar 2002- 2003 integramos una nueva modalidad: responder el examen mediante el uso de Internet, con la cual simplificamos aún más la recopilación de datos.

Por primera ocasión, 6,240 alumnos presentaron exámenes y 110 docentes contestaron encuestas vía Internet. Las escuelas sin conectividad trabajaron en red local, participando en esta modalidad 19, 410 estudiantes y 433 maestros y directivos. En total, 25,650 alumnos y 543 docentes participaron en la evaluación, superando la muestra anterior que fue de alrededor de 20,000 participantes.

En el presente año escolar realizaremos la cuarta Evaluación en línea, usando las modalidades de red local y de Internet y, a partir del ciclo escolar 2004-2005, se agrega oficialmente a Emat Coahuila el uso de Cabri, por lo que fue necesario elaborar un nuevo examen que contiene reactivos de Geometría

Por ende, ajustamos la evaluación del Programa EMAT correspondiente al ciclo escolar 2003-2004, agregando reactivos de geometría, que nos permitirán evaluar los conocimientos básicos de geometría y manejo de Cabri en los tres grados de secundaria; lo anterior nos servirá como diagnóstico para elaborar nuevas hojas de trabajo y diseñar las actividades del Quinto Curso de Reforzamiento Técnico Pedagógico.

Un objetivo más que perseguimos al aplicar dicha evaluación, es detectar a los alumnos de mejor aprovechamiento, para invitarlos a participar en la Cabri Competencia, que se realizará el día 28 de mayo vía Internet, con lo cual pretendemos lograr la participación de alumnos de todo Coahuila.

Elementos Lúdicos y Cabri, una buena combinación

M.E. Gerardo Gallegos Gámiz.
Integrante del grupo de instructores de EMAT en Durango.
Subsistema de Secundarias Generales.
Secretaría de Educación del Estado de Durango.
gergamiz@hotmail.com

"Nunca son los hombres más ingeniosos
que en la invención de sus juegos"
Leibnitz.

La naturaleza cognoscitiva del hombre está ligada a los elementos lúdicos, visuales, representativos e intuitivos. Así, quien se dedique a la docencia no puede dejar de lado estos elementos, debe cultivar en lo posible la actitud lúdica en el desarrollo de su actividad profesional.

Cabri Géomètre es un software con múltiples bondades didácticas, mismas que se pueden aprovechar incluyendo actividades que contengan elementos conocidos y atractivos para los adolescentes, tales como dibujos animados y personajes de los comics. En esta plática se mostrarán algunos resultados que surgieron al trabajar en el aula, actividades con estas características, destacando en ellos la motivación, trabajo de equipo, uso adecuado de lenguaje matemático, apropiación significativa de conceptos matemáticos y el desarrollo de análisis y razonamiento, a través de la observación, entre otros. Los resultados presentados se apoyarán con videos y fotografías que muestran el desempeño de los alumnos durante las sesiones. Además, en una de las clases se contó con la presencia de la Dra. Teresa Rojano Ceballos, quien es Coordinadora Nacional del Programa "Enseñanza de las Matemáticas Asistida con Tecnología" (EMAT), y su equipo de colaboradores por parte de la Dirección General de Métodos y Materiales Educativos y del CINVESTAV, en calidad de observadores.

A continuación aparecen las actividades trabajadas y la construcción inicial de la que se parte al aplicarlas:

HOJA I BOB ESPONJA

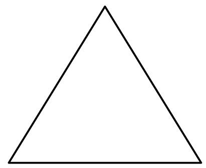
Nombre____
Gpo.____

1.- ¿Recuerdas lo qué es un ***Eje de Simetría***?, escribe lo que recuerdes de este concepto.

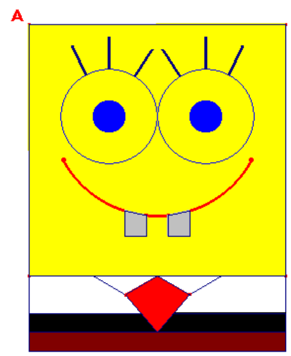
____
____

____
____

2.- Traza los ejes de simetría de las siguientes figuras.



3.- A continuación se muestra una figura *parecida* a "Bob Esponja" (¿lo conoces?).



4.- Abre el archivo "Bob Esponja_1" . Enseguida abre el archivo "Bob Esponja_4"

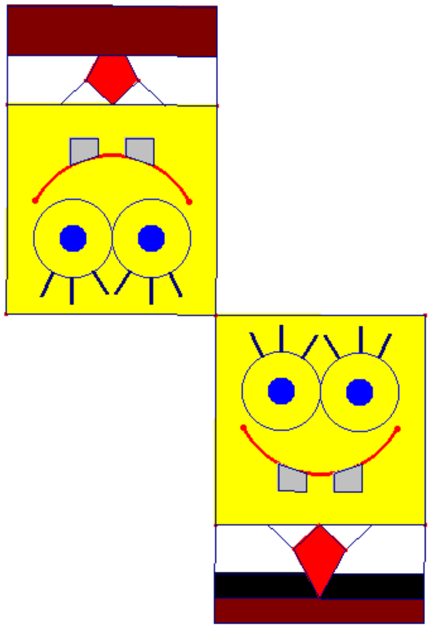
5.- Utilizando las herramientas necesarias de CABRI completa la cara de "Bob Esponja". Recuerda que debe soportar la prueba del arrastre. ***Al reverso de la hoja, describe paso a paso cómo lo construiste.***

6.- ¿Cuántos triángulos puedes identificar en la figura de Bob Esponja?_______________

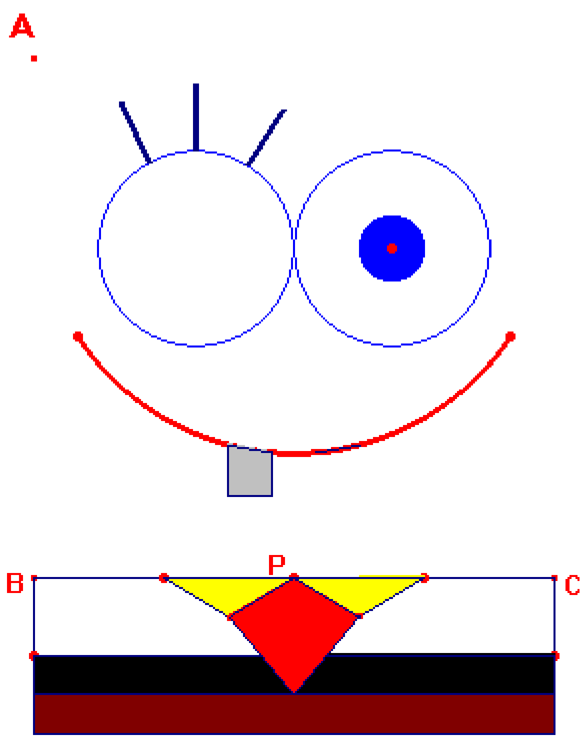
7.- ¿Qué tipo de triángulos son?_________________________

8.- ¿Justifica tu respuesta?____

9.- Usa CABRI para reproducir la siguiente imagen .



Observación: Para aplicar esta hoja de trabajo se les da el archivo Bob Esponja_1 donde se desactiva la herramienta ocultar mostrar y Bob Esponja_4 que corresponden a la siguiente construcción:

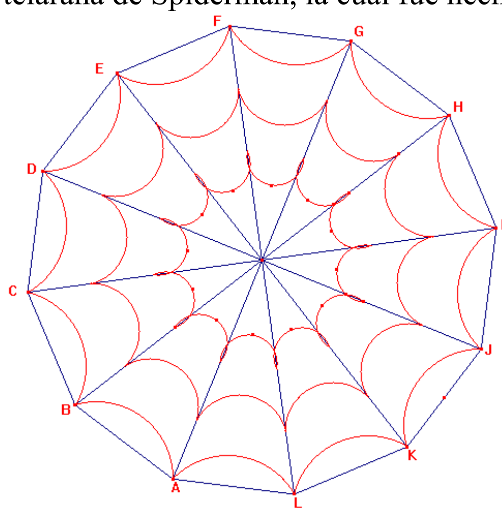


HOJA II SPIDERMAN

Nombre
____Gpo.__

¿Conoces al siguiente Súper héroe?

Enseguida se muestra una telaraña de Spiderman, la cual fue hecha en "Cabri".



1) Abre el archivo: "spiderman_1.fig" e inmediatamente después abre el archivo "spiderman_2.fig" y termina de construir la telaraña usando las herramientas necesarias.
Al reverso de la hoja describe paso a paso como lograste la construcción (recuerda que debe soportar la prueba del arrastre).

2) Como te habrás dado cuenta, la forma de la telaraña simula un polígono regular. ¿Cuántos lados tiene el polígono?__________ ¿Cuál es el nombre de dicho polígono?________________

3) Calcula el área del triángulo ALO. Describe los pasos para encontrar dicha área ____
____
____

4) ¿Cómo se calculará el área de todo el polígono?______________________________

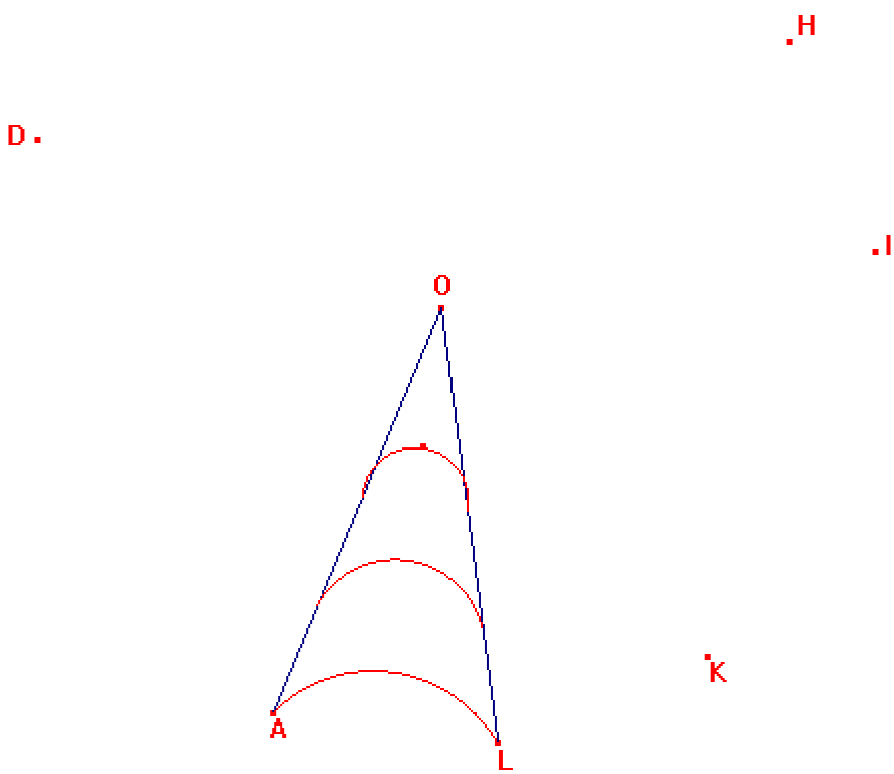
5) Basándote en los vértices del polígono (telaraña) construye:

- Dos triángulos equiláteros de distinto tamaño.
- Dos triángulos isósceles de distinto tamaño.
- Dos triángulos escalenos de distinto tamaño.

Nombre de cada triángulo:

Equiláteros:	Isósceles:	Escalenos:
__________	_________	_________
__________	_________	_________

Observación: Para aplicar esta hoja de trabajo se les proporcionan los archivos spiderman_1.fig y spiderman_4.fig, el primero para desactivar la herramienta ocultar-mostrar y la segunda corresponde a la construcción siguiente:



<u>HOJA III TESELACIONES</u>

Teselaciones regulares

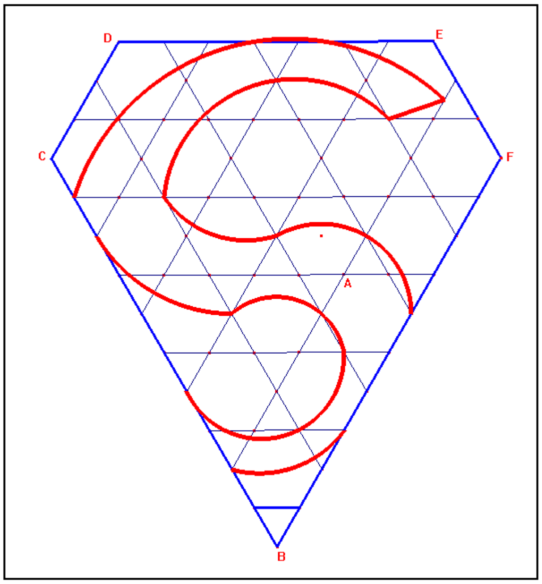
Un polígono regular que tiene 3 o más lados y ángulos iguales se denomina una tesela regular o mosaico.

1. ¿Recuerdas qué es un polígono regular? ¿Cuáles polígonos regulares conoces? Menciónalos:____
____

Diremos que podemos teselar o recubrir el plano por medio de una tesela regular si por medio de rotaciones, traslaciones y reflexiones de podemos llenar el plano sin que haya traslapes y sin que queden huecos.

¿Conoces la siguiente figura?

Se usó "Cabri " para construir una figura "parecida" al escudo de Superman, la cual se muestra enseguida:

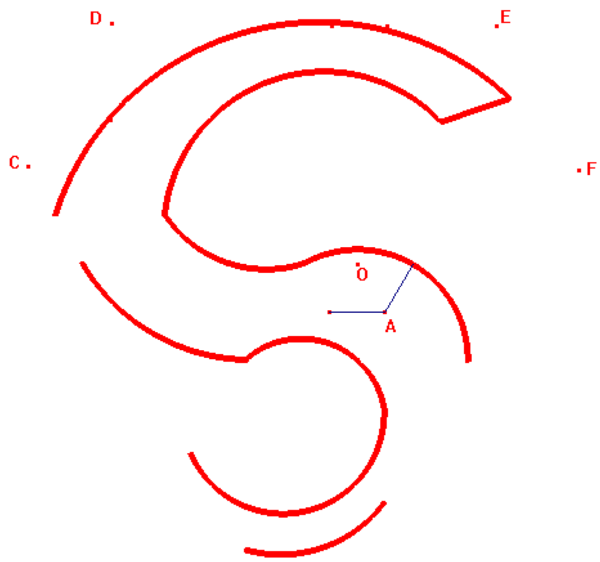


2. Observa el fondo del escudo. ¿Con qué figuras se **recubrió el plano**?___________________

Abre el archivo "superman_1.fig". Después, abre el archivo: "superman_2.fig"

Usa las herramientas necesarias para completar la figura. Al reverso de la hoja describe paso a paso cómo realizaste la construcción.

Para esta actividad se les proporcionan los archivos superman_1.fig y superman_2.fig, al igual que en las actividades anteriores el primero para desactivar la herramienta ocultar-mostrar y el segundo con la construcción siguiente:



Reportes de Investigación

Cabri-géomètre en Precálculo

Andrés Rivera Díaz

Justificación

Una mejor comprensión de cómo los alumnos aprenden matemáticas está llevando a los educadores matemáticos a proponer nuevos enfoques metodológicos para la enseñanza de esta materia. Enunciada brevemente, aunque de manera incompleta, la actual reforma en Matemáticas propone que los alumnos adquieran una participación activa en la construcción de sus conocimientos, que el maestro sea un promotor del conocimiento y no sólo la única fuente de éste, y que el contenido curricular tenga un renovado espíritu matemático.

También hay consenso en la necesidad de nuevos objetivos sociales (aprendizaje continuo, oportunidad para todo el mundo y ciudadanos bien informados), así como nuevos objetivos para los estudiantes (aprender a valorar las matemáticas, adquirir seguridad en la propia capacidad, ser capaz de resolver problemas matemáticos, aprender a comunicarse matemáticamente y aprender a razonar matemáticamente). En particular, con una tendencia a futuro próximo, el fácil acceso a la tecnología (calculadoras, computadoras, etc.) y su consecuente impacto en la sociedad, la reforma propone el uso de la tecnología en todos los niveles escolares. (Rivera Díaz, A. 1996)

La reforma educativa que el país está viviendo lleva a la necesidad de considerar el uso de metodologías e instrumentos innovadores en el salón de clase. La calidad de la educación matemática puede mejorarse de manera importante gracias a la utilización de herramientas didácticas como programas de computación y al hecho de que para muchas personas e instituciones, el computador personal es una herramienta más o menos común. Para enfrentar este nuevo reto los profesores tienen que avanzaren su formación sobre el tema. Trabajar con la tecnología para efectos de diseñar y desarrollar actividades didácticas puede ayudar mucho en esta capacitación.

Actualmente en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), contamos con una Maestría en Ciencias con Orientación a la Enseñanza de las Matemáticas y en el primer módulo partimos que la geometría es parte fundamental de la formación matemática y así lo reconocen y recalcan, los profesores-alumnos, la importancia de esta disciplina al establecer indicadores expresamente relacionados con la geometría, en los distintos niveles de la educación formal.

Con el interés de contribuir al conocimiento sobre el uso de la tecnología y para validar o refutar las recomendaciones en la reforma educativa estamos implementando una metodología para la enseñanza de las matemáticas en una clase de matemáticas para los alumnos de Bachillerato (precálculo), que consta del uso de CABRI GÉOMÈTRE II en dicho reporte para promover una imagen global del concepto de función.

Pertinencia de Cabri-géomètre en Precálculo

En el área de las matemáticas, en particular, las investigaciones muestran que los nuevos programas de computador como Cabri-géomètre, son agentes didácticos que pueden generar nuevas actividades que no son posibles de lograr con los medios tradicionales como el lápiz y el papel. En particular, programas como Cabri-géomètre le permiten al estudiante trabajar, de manera interactiva, en varios sistemas de representación interconectados. Esta posibilidad de ver y trabajar con los objetos matemáticos en varias representaciones y observar de manera dinámica los cambios que aparecen (y las invariantes que permanecen) cuando se manipulan los objetos en la pantalla es un aspecto esencial del proceso de comprensión de las matemáticas. La interactividad y el aspecto dinámico del manejo de los objetos matemáticos en diversos sistemas de representación, junto con el diseño fundamentalmente didáctico de un programa como Cabri-géomètre (que permite trabajar con base en las invariantes geométricas) le permite vivir al estudiante una experiencia matemática completamente innovadora que no es posible tener de otra forma. Los objetos matemáticos dejan de ser una sucesión de símbolos para los cuales hay que conocer un conjunto de algoritmos con los que se pueden resolver problemas estándar y se convierten en objetos "vivos" para los que el estudiante puede explorar, formular conjeturas, verificar hipótesis. En otras palabras, gracias a programas como Cabri-géomètre, el estudiante puede "hacer matemáticas" en el mismo sentido que hace matemáticas el matemático puro. Y al hacerlas, el estudiante tiene la oportunidad de construir un verdadero conocimiento matemático que aporte a su "potencia matemática": su capacidad para resolver problemas complejos y para avanzar en su formación matemática.

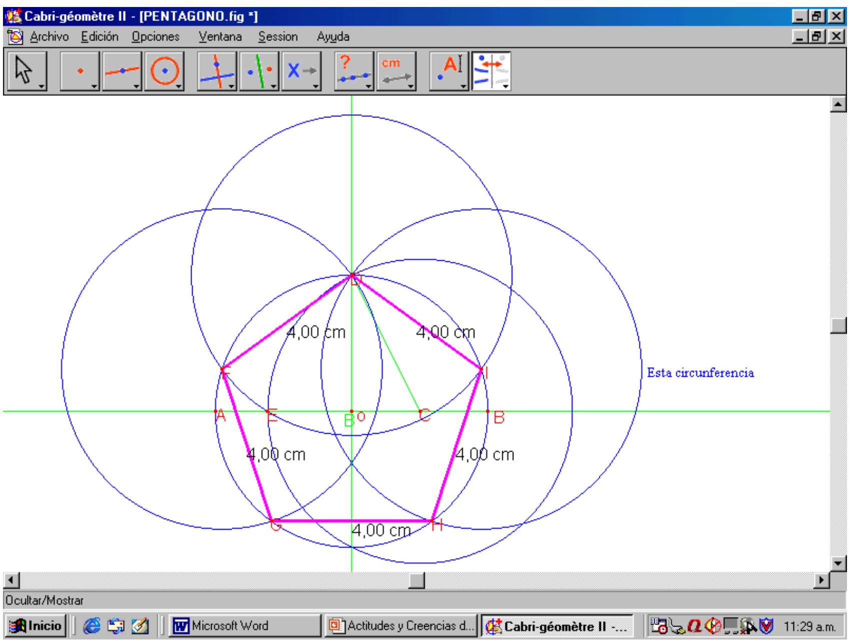


Fig. 1 Construcción de un Pentágono Regular

Las matemáticas del bachillerato son más formales que lo que parecen ser, es decir, en el bachillerato desde el primer año se comienzan a usar casi todas las herramientas típicas que usa un matemático haciendo matemáticas avanzadas, como son las definiciones, los teoremas, las demostraciones y las conexiones entre todos ellos. La enseñanza de la geometría difiere mucho de la enseñanza de la aritmética, puesto que en la primera se usan herramientas complementarias, como son el transportador, las escuadras, la regla y el compás. Sin embargo ambas deben desarrollar en el estudiante la misma capacidad de abstracción y rigurosidad de las matemáticas.

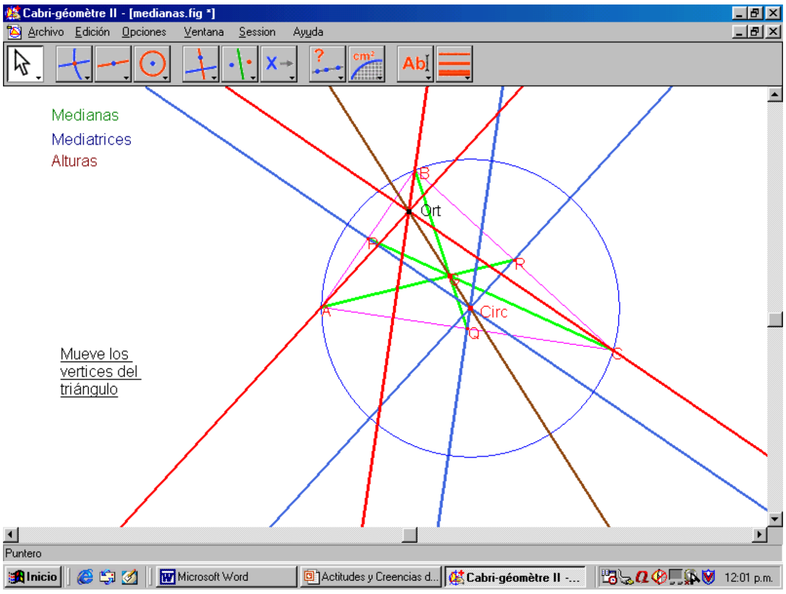
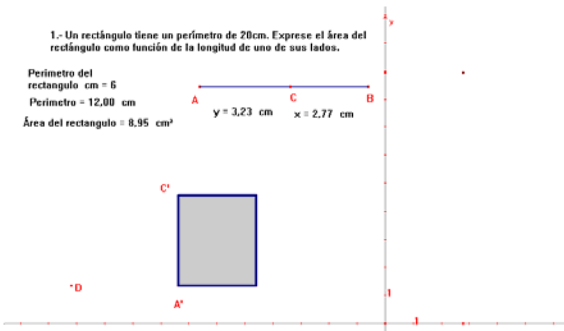


Fig.2 Recta de Euler

Nuestro reporte inicia con la aclaración de dos términos técnicos usados en este trabajo (precálculo e imagen de un concepto). Existen dos concepciones de lo que es el precálculo. Una de ellas se basa en el desarrollo histórico del cálculo mientras que la otra se fundamenta en el currículo. La primera corriente percibe al precálculo como el cálculo que los matemáticos realizaban antes de establecer los fundamentos y herramientas de éste. La corriente curricular, en cambio, percibe uno de los objetivos del precálculo como una preparación del estudiante para iniciar sus estudios formales de cálculo. En esta perspectiva, dotar al alumno de una idea intuitiva de algunos conceptos centrales de cálculo (funciones y límites) es fundamental.



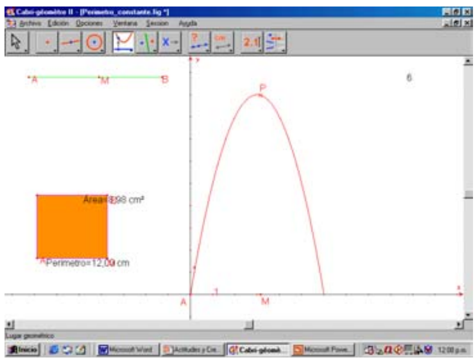


Fig. 3 Problema de optimización 1

La imagen de un concepto matemático se refiere a las ideas que se asocian con ese concepto. Esas ideas están determinadas por el tipo y la cantidad de experiencias que los alumnos tienen con el concepto en cuestión. La imagen de un concepto se desarrolla con los estímulos, la experiencia y la maduración. Tall y Vinner (1981) dicen que la imagen de un concepto se escribe “la estructura cognitiva total que se asocia con un concepto, la cual incluye todos los tipos de representaciones [pictórica, simbólica, tabular, gráfica, etc.] y las propiedades y procesos asociados” (p. 152). Varios autores han reportado las imágenes asociadas con funciones en distintas poblaciones de alumnos (p.ej. Ferrini-Mundy y Graham, 1991).

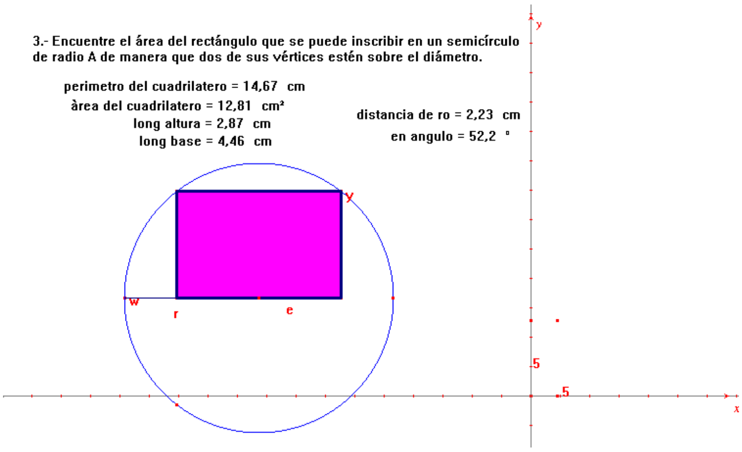


Fig. 4 Problema de Optimización 2

En otras palabras para poder asegurar que algo es cierto en matemáticas, teniendo en cuenta los supuestos originales (axiomas o postulados) se debe establecer una secuencia lógica de demostraciones, las cuales en ningún momento pueden basarse en un argumento de construcción sino de análisis. Por ejemplo, un profesor "armado" con regla y compás dirige a sus estudiantes para construir un hexágono regular en una hoja de papel. Después de finalizado el proceso el profesor dice, que quien en el último corte no llegó a la primera marca hecha sobre la circunferencia, fue porque se le corrió la punta del compás en uno de sus cortes o el estudiante involuntariamente modificó la abertura del compás. La mayoría de los estudiantes no creen que fue así, más aún cuando, de pronto, el mismo profesor con su gran compás de madera tampoco lo logró. Obviamente, en algún curso, que puede ser en el mismo o en otro superior, se tendrá que demostrar analíticamente que el hexágono regular inscrito en una circunferencia tiene como medida de su lado la medida del radio de la circunferencia. Entre más fina (precisa) sea la construcción geométrica, mayor es el reto que el estudiante siente de poder demostrarlo analíticamente. Como el ejemplo anterior existen muchos ejemplos, los cuales muestran que aunque las construcciones geométricas no demuestran matemáticamente una aseveración, sí pueden estimular a que el estudiante se interese por demostrarla analíticamente.

La tecnología en la Enseñanza de la Matemática: El caso de las funciones.

Las recomendaciones para usar tecnología en la clase de matemáticas son abundantes, pues se considera que su uso puede impactar positivamente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (p.ej., Imaz, 1989). Es cierto que algunos resultados de la investigación sobre el uso de la tecnología en la clase de matemáticas están creando grandes y prometedoras expectativas de la tecnología, pero todavía su uso en la Matemática Educativa sigue siendo "nuevo, inesperado, sin estudio e impredecible" (Sowder, 1989, p. 29).

Esta falta de conocimiento sobre el impacto de la tecnología en la Enseñanza de la Matemática está generando la producción de una red creciente de conocimientos respecto a su uso en la clase de matemáticas. Los tópicos de investigación con tecnología están relacionados con las representaciones múltiples, la redefinición de lo que es fundamental en matemáticas, la posibilidad para los estudiantes de participar en discusiones del mundo real, la manera en que se enseñan las ideas matemáticas y las formas en que los alumnos aprenden estas ideas (Sowder, 1989). Con el surgimiento de la tecnología que grafica conocida como graficadores, muchos educadores matemáticos conjeturan que la enseñanza y el aprendizaje de gráficas y funciones puede impactarse positivamente. Concretamente, se cree que los alumnos que utilizan graficadores pueden adquirir una imagen global del concepto de función (visualizar el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos extremos, las asíntotas y las raíces).

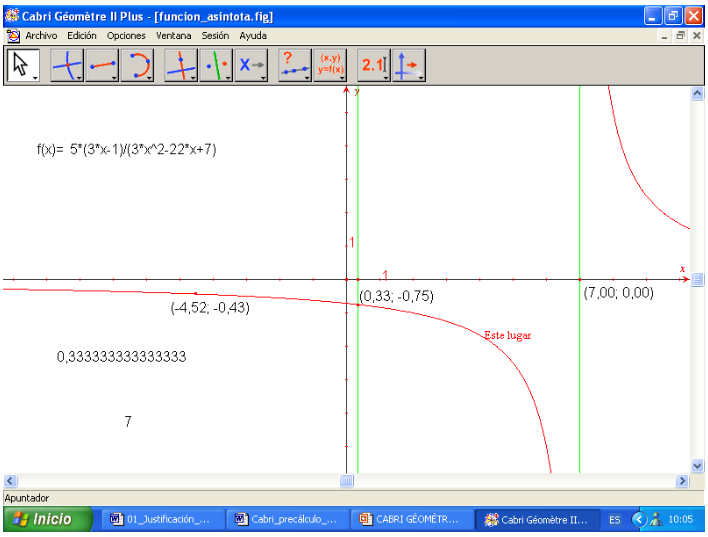


Fig. 5 Análisis de una función racional

Construyendo una imagen global de funciones matemáticas con CABRI GÉOMÈTRE II.

Como vimos anteriormente, la imagen del concepto de función que los alumnos construyen se debe al tipo de experiencias con este concepto. Por ejemplo, los alumnos pueden creer que las funciones son ecuaciones, ignorando el dominio de la variable y limitándose a la regla algebraica. Aunque concepciones como ésta son naturales en el aprendizaje del concepto de función, pueden ser un obstáculo en el aprendizaje de una teoría más formal.

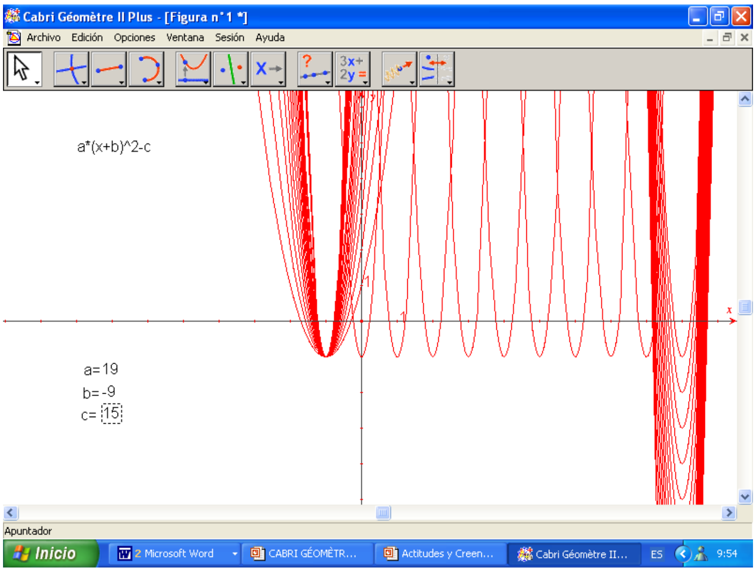


Fig. 6 Análisis de los parámetros de una función

Uno de los propósitos del estudio del cual emana este reporte es proveer al alumno de experiencias que conlleven a una construcción global de las funciones. Durante el reporte ilustramos el uso de CABRI GÉOMÈTRE II con esta finalidad. El reporte se apoyará en CABRI GÉOMÈTRE II para enfatizar la representación geométrica de las afirmaciones algebraicas cuando sea posible y en la resolución de problemas.

Referencias Bibliográficas

- Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1991). *Research in calculus learning: understanding of limits, derivatives, and integrals.* Paper presented at the Joint Mathematics Meetings, Special Session on Research in Undergraduate Mathematics Education, January, 1991, San Francisco, CA. USA.
- Imaz, C. (1989). ¿Qué es la matemática educativa? *Pedagogía*, 6(17), 5-8.
- J. Sowder (1989) (de.). *Setting a research agenda. Research agenda for mathematics education.* vol. 5. Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.
- Rivera Díaz, A. (1996). Acerca de la Relación entre el Saber y los Efectos de la Tecnología. (Una investigación con profesores sobre sus actitudes y creencias). Tesis que para obtener el grado de M. en C., Especialidad en Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

LA OBRA DE GAUDI NEXO DE UNION ENTRE GEOMETRIA, NATURALEZA Y ARTE

Marta Branada de la Barra. Profesora de Física
m.branada@eudoramail.com
D.Carmen Pizarro Aguilera. Profesora de Matemática.
Cpizarro@educarchile.cl

Introducción

La Reforma Educacional iniciada por el gobierno busca la actualización y una renovación en las metas, los contenidos y en las metodologías de enseñanzas.
La Teoría de inteligencia Múltiples es reconocida por el aporte que hace el Dr.Howard Gardner, profesor de Psicología y Ciencias de la educación de la prestigiada Universidad de Harvard. Plantea que la Inteligencia no es única y unidimensional tal como se creía hasta hace muy poco, sino por el contrario existen diferentes clases de inteligencias.Las teorías de la inteligencias que enfatizan la existencia de una variedad de talento y capacidades humanas se apartan de la visión popular que ve a la intaligencia o habilidad como una capacidad singular y dada. Gardner sostiene que mientras la escuela tradicional ha enfatizado sólo dos habilidades, la verbal-lingüística y la lógica-matemática, muchas otras importantes "inteligencias" existen, incluyendo la espacial-visual, la del movimiento, la musical, la interpersonal e intrapersonal. Gardner sostiene que todos los individuos tienen fortaleza en dos o tres de estás áreas. Más aún, existe una variedad tremenda en las maneras y velocidades en que las personas adquieren el conocimiento, en la atención y capacidad de memoria que puedan aplicar a esta adquisición de conocimiento y al desempeño, y en las maneras que puedan demostrar el significado personal que han creado. Para tener éxito con todos los estudiantes, la enseñanza y la evaluación necesitan basarse en más que la inteligencia linguistica o de matemática lógica y suscribirse al presupuesto que todos los estudiantes pueden aprender, incluyendo cognición, metacognición y afecto.

El presente material parte definiendo el concepto de Inteligencia Múltiple dado por el Dr. Gardner, para luego hacer un desglose de cada una de las Inteligencias, enumerando las características de cada inteligencia.

Este modelo de estrategia metodológica en el aula genera redes conversacionales con sus pares y maestros dejando atrás sus roles únicos y solitarios.

La educación Matemática y Física especialmente en la etapa primaria y secundaria, juega un papel decisivo en la comprención de conceptos básicos necesarios para desenvolverse en el mundo que nos rodea.

El sofware Cabri nos permitio un desarrollo del pensamiento racional al utilizarlo como herramienta concreta facilitando el aprendizaje de nuestras alumnas realizando construcciones de funciones como: parábola, elipse, hipérbola…logrando un acercamiento intuitivo de estudio de la obra de Gaudi.

Gaudi aplica la geometría en sus contrucciones relacionandola con la naturaleza y los teoremas matemáticos.

Presentacion del problema:

Existe baja autoestima para continuar estudios superiores; y el no poseer una herramienta que les permita valorarse o usar una evaluación que no ve la diversidad de nuestras alumnas y estilos de aprendizaje esta influyendo en sus perpectivas futuras por lo cual la investigación se lleva a cabo con el aporte de H. Garner con las Inteligencias Múltiples, donde cada una de cada sección del taller va de lo general a lo particular para internalizar el conocimiento usando guías de trabajo, video, Internet sofware Cabri como herramienta de apoyo.

Hipotesis:

Si las alumnas son capaces de reconocer y aplicar su o las inteloigencias mas desarrolladas entonces lograran una automotivación en distintas áreas y lograran la construcción de su desarrollo pleno y serán capaces de diseñar su proyecto de vida.

.Población:

La población que conforma nuestro trabajo es la institución Liceo de Niñas de Quillota con un total de 630 alumnas distribuidas en 20 cursos de secundaria

Muestra:

El taller se constituyo con un grupo de 31 alumna de Cuarto año medio (secundaria)Científico -Humanista con la especialidad Biologo- Matematico, cuyas edades fluctuan entre 16 años y 17 años las cuales tienen 3 horas pedagogicas en Matemática más 2 horas de preparación a estudios superiores y dos profesoras asesoras con una duración de 5 meses en un trabajo sistemático.

Método de Investigación y/o Experimentación:

El método de investigación es descriptiva y experimental.

La investigación se realizo con estrategias de trabajo en equipo según su inteligencia predominante logrando creaciones en base a objetivos planificados en cada taller. Se utililizo investigaciones previas en diferentes temáticas y desarrollo de guías,exposición de temas, comentario y analisis de video, utilización de sofware cabri, uso de internet y correo electrónico, etc

Las evaluaciones fueron de proceso y producto, de autoevaluación y coevaluación.

Esquema gráfico del Taller
Como una secuencia para implementarla en la sala de clases.

"La Obra de Gaudi nexo de unión entre Geometria, Naturaleza y Arte"

Objetivo: Preparar a las alumnas para que puedan aplicar con efectividad las inteligencia múltiples en diferentes áreas del saber como elemento dinamizador de su proceso de aprendizaje, mediante el uso y aplicación del sofware Cabri reconociendo las propiedades geometricas y relacionando la geometria con las maravillosas construcciones creadas por Antonio Gaudi.

Taller 1:

Clase Motivacional.

a) La memorización:

Motivación.

Comprensión.

Asociación.

Repetición.

b) Entrenamiento Continuo:

c) El poder de los ojos.

Taller 2:

Fundamentación teorica de las IM.

- Aplicación, evaluación del Test de inteligencias Múltiples.
- Conciencia IM
- Autoconciencia IM
- Enfoque de una I. Especifica
- Aplicación en el aula
- Aplicación a Proyectos.

Taller 3:

Objetivo: Conocer la obra de Gaudi mediante multimedia.

Actividades:

Investigaciones previas.

Taller 4:

Objetivo: Desarrollar el tema La Obra de Gaudi enfocada con profundidad en la parte geométrica.

Actividades:

1. Bosquejar isometrias, mosaicos utilizadas por Gaudi.
2. Obtener truncamientos de un cubo de papel, cartulina, plasticina, micas, etc.
3. Formar figuras con los cubos trucados llamados sólidos.
4. Dibujar y elaborar poliedros.
5. Elabore un modelo helicoidal utilizado por Gaudi.
6. Enumere las obras de Gaudí donde uso las cónicas: parábola, elipse y otros.

7. Indicar , desarrollar y aplicar en ejemplos cada ecuación de las cónicas.

7. Elaborar un plano de movimientos lineales con figuras de repeticiones que se identifican en ventanas, torres, copulas y adornos, diseña un tesselado

8. En la finca Welk la puerta tiene simbologías como el dragón, las conchas, etc. Descríbalos geometricamente.

10. elabora una muestra Geométricamente según tú inteligencia: los tipos de diseños utilizados en la finca de modernismo Catalán

11.Analiza geométricamente e indica si hay semejanzas con la naturaleza en la construcción de la casa Milla

Taller 5:

Objetivo: Usar, aplicar y descubrir las propiedades y construcciones geometricas experimentando con la herramienta del Cabri.

Actividades.

1. Transformaciones isométricas
2. Tesselaciones
3. Poliedros
4. Funciones lineales
5. Cónicas

Taller 6:

Objetivo: Aplica según tu Inteligencia.

INTELIGENCIA	**Actividades**
Lingüística	- Crean un cuento y/o historia desde el punto de vista juvenil ; el recorrido en Barcelona por algunas construcciones describiendo en lenguaje **Histórico, Geométrico, Naturalista y Artístico.** - Biografia de Gaudí - Noticia de Gaudi en Chile: En la ciudad de Rancagua.
Lógica/ Matemática	1. Cronología de sus trabajos más importantes. 2. Reporte acerca de las formas geométricas que utilizo Gaudí en sus construcciones: - circunferencia, elipse, hipérbola, parábola. 3. Truncamiento de cubos, 4. Poliedros 5. Isometrías: simetrías, rotaciones, traslaciones. 6. Representaciones con Cabri.
Espacial	- Representar el material usado por Gaudí en: - Maquetas - Diseños - Pintura en óleo de sus obras.
Corporal o Física	- Acto sin palabras describiendo su arquitectura

	modernista que utilizo en sus construcciones como: 1. mimos o figuras en movimiento 2. figuras geométricas 3. cuerpos geométricos 4. cónicas
Músical	- Hacer una canción dedicada a Gaudi donde se destaca sentimientos, creaciones, legado. - La música unida a la arquitectura.
Interpersonal	- ¿Qué le impacto más? - ¿Qué se ha dicho de Gaudí? - ¿Cuáles son las mejores construcciones que se nombran? - Representación de las formas Cónicas en un tesselado con imagen y fondo.
Intrapersonal	- Reflexionar en cada una de las fotos de sus construcciones: - Construyen en mural, foto - lenguaje elaborando en cada una de ellas una pregunta que lleve a la reflexión.

Taller 7

Objetivo: Creacion de un CD.

Actividad:

Crean una presentación en Power point con teoria de cada inteligencia Múltiple y aplicación de la obra de Gaudi nexo de unión entre Geometria, naturaleza y arte.

Recopilación de las presentaciones dando origen a un CD.

Taller 8

Objetivo:

Objetivo: Muestra itinerante.

Actividades exposición realizada por las alumnas

Explora: Colegio Sagrado Corazones Viña del Mar Quinta región Chile.

Pasantia Nacional: Colegio Adventista de Concepción Octava región Chile.

Exposición interna: Liceo de Niñas de Quillota Quinta región Chile.

Taller 9

Objetivo: Evaluación Final.

Autoevaluación de las alumnas:

- ❖ El taller realizado fue motivador, activo participativo donde logramos aprender los objetivos propuestos.

❖ Vivenciamos la transversalidad a través de actitudes valoricas y humanizantes, reconocemos que somos seres integros, que sentimos con nuestro cuerpo, que nos comunicamos de diferentes maneras, es decir, somos múltiples y diversos logramos vibrar,vivenciar y transmitir la geometria asociada a la arquitectura, arte,naturaleza y tegnología .

Profesoras Guías:

Se logro el objetivo por el estudio de la geometria en forma descriptiva y experimental mediante la utilixzación de la Matemática de hoy y de ayer vista con la geometría dinámica.

❖ Demostrar que la Matemática es mucho más que una colección de definiciones, teoremas, demostraciones, etc.

❖ Hemos querido ofrecer un puente hacia una Matematica que no esta separada de lo cotidiano, de lo que nos rodea y poder explorar con sus propios medios y estilos de aprendizaje.

❖ Descubrir como muchas cosas que no parecen terner conección entre sí, estan en realidad intimamente relacionadas y que vivimos rodeados de aplicaciones en nuestro mundo y como podemos servirnos de ellos.

Impacto en la Comunidad :

- Explora 2003 "Ciencia por la Paz":

Felicitaciones especiales para las profesoras Marta Granada y Carmen Pizarro, por, este Proyecto maravilloso, que permite a los jóvenes, relacionarse con todas las áreas del conocimiento, permitiéndoles valorar sus talentos, desde su originalidad, desde sus inteligencias.
Además este Proyecto, mejora la autoestima de los alumnas, que se expresan con pasión de su trabajo.
Gracias! por compartir este gran regalo con nuestros jóvenes.
Es un orgullo para el liceo.
Les sugiero que lo den a conocer a más Colegios, ya que tiene un valor inimaginable.
Rosa María Contreras
Orientadora
Colegio SS.CC Monjas Francesas

tmaroc@hotmail.com

Encuentro que es una maravilla todo lo que ha hecho este artista; y más aún el ver como es motivo de entusiasmo, creación y estudio por parte de los jóvenes de este colegio!
Los felicito por rescatar la importancia de la genialidad, creatividad y de las matemáticas como ciencia.
Los felicito y ha sido un placer tenerlos con nosotros.
Gloria [illegible]
SSCC - Alvarez Viña.

Programa Explora - Conicyt:

16 de abril de 2004 N° 000441/04

Comentario este proyecto corresponde a una Innovación Pedagógica.

CONCLUSIONES

Considerando que la reforma educativa se encuentra en plena fase de implementación, la educación tiene un gran desafio, el logro de obtener estudiantes capaces de independizarce en su propio aprendizaje motivados por la investigación; esta propuesta plantea formas de trabajo que permiten el logro del desafío planteado.

La propuesta metodologica implementada en esta investigación deja de lado el módelo tradicional en donde favorece los procesos de conceptualización logrando que el alumnos relacione los conceptos previos con los nuevos conceptos, además es una porte importante para todos los que busquen una ayuda en lo que se refiere a las innovaciones metodologicas.

Un problema que se visualiza en la aplicación de esta prupuesta tiene relacion con la exigencia academica que exige tanto a los alumnos como al profesor por lo que hace dificil la aplicacuión de la innovación.

La utilización de sofware cabri y los computadores facilitó enormemente la implementación de la propuesta metodólogica pues en cada fase de la investigación las alumnas estuvieron muy motivada.

Se uso las inteligencias Múltiples por que hoy en dia la información se encuentra de diversas formas que requieren mayores destrezas y habilidades por lo que provee mas oportunidad para sentirse exitoso y valoradas a medida que toma confianza aumentan las áreas más fuerte dispuesto a tomar más riesgos esto les permite a las alumna mayor conocimiento y creatividad en la variedad de vías para representar su aprendizaje.

La Innovación logro en las alumnas un crecimiento personal donde las inteligencias Múltiples contribuyeron a potenciar los aprendizajes en diferentes áreas, permitiendo valorar sus talentos desde sus principios proyectándolos a sus semejantes.

Mediante la utilización de metodología pudimos constatar un logro significativo de los aprendizajes de nuestras alumnas en un 97%

ACERCAMIENTO INTUITIVO A LA NOCIÓN DE MEDIATRÍZ EN LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS ISÓSCELES

Lorenza Lozano Moreno

Colegio Distrital República de Costa Rica

El artículo presenta una experiencia de aula con estudiantes del grado sexto sobre un tema geométrico abordado como una propuesta de Situación Problema. Se plantearon importantes procedimientos de solución en la construcción de familias de triángulos isósceles, en el contexto de Geometría Dinámica del programa Cabri Géomètre. *Este nuevo ambiente hizo que los roles de los estudiantes y el profesor fueran activos, que la comunicación mejorara y que el aprendizaje en geometría se constituyera en un proceso más significativo.*

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría en la educación tradicional se aborda generalmente mediante la presentación de un compendio de definiciones y fórmulas proporcionadas por el maestro, seguidas de algunos ejemplos. El papel de los alumnos consiste en consignar lo que el profesor explica para luego memorizar dichas definiciones y fórmulas y responder las preguntas en las evaluaciones. En este ámbito, nociones como la de triángulo escaleno, triángulo isósceles y triángulo equilátero, son asociadas frecuentemente con la medida de sus lados abandonando criterios geométricos que le dan mayor significación como la congruencia o no de segmentos y el uso de la Mediatríz como herramienta para la construcción.

Este tipo de trabajo se debe quizás, a la pobreza del tratamiento de los objetos de estudio, y al ambiente de rigidez en la acción que se desarrolla en el aula de clase. Es así, que se emplean pocas representaciones, frecuentemente dibujos, y estos son propuestos exclusivamente por el docente. El estudiante entonces, rutiniza su actividad y por lo tanto la posibilidad de ampliar su conocimiento, a partir del estudio de diversas representaciones que lo lleven a establecer relaciones geométricas y a descubrir propiedades de manera espontánea, producto de la exploración del objeto de estudio en cuestión.

La experiencia de aula que se presenta, tuvo como propósito modificar el ambiente de aprendizaje a partir de un enfoque didáctico diferente, que parte de una situación problemática relativa a la construcción de triángulos isósceles, en la cual, la acción del estudiante cambia y el objeto de estudio se convierte en fuente para el establecimiento de relaciones y la identificación de invariantes geométricos. Este ambiente es posible gracias a los contextos tecnológicos que movilizan y amplían el campo experiencial del estudiante. El programa Cabri Géomètre se presenta como una alternativa de exploración dinámica y experimentación de una realidad virtual en la cual el estudiante exterioriza sus creencias y elabora propuestas intuitivas de conceptos geométricos nuevos para él, como es el caso de lugar geométrico, enriquece sus argumentos y propone la solución al problema mediante la identificación de las propiedades de los objetos geométricos y sus relaciones.

2. MARCO TEORICO

Las ideas que enmarcan la propuesta y sirven como referente para la evaluación y el análisis de la experiencia de aula se puede sintetizar en tres afirmaciones:

- la comprensión en geometría se logra a partir de la articulación de diversas representaciones,
- el aprendizaje significativo se logra a través de un ambiente de situación problema y,
- los contextos de geometría dinámica favorecen la construcción de ambientes de situación problema y permiten la articulación de diversos sistemas de representación, contribuyendo así al aprendizaje de las matemáticas.

La primera afirmación es sustentada por diversos investigadores quienes manifiestan que sin recurrir a la idea de representación es imposible estudiar los fenómenos relativos al aprendizaje. Una persona aprende cuando *"domina los distintos sistemas de representación y los diferentes tipos de actividades asociadas a estos" (Rico y Romero, 1999).* En matemáticas, esta idea cobra mayor peso pues, como lo plantea Duval (1996) en el aprendizaje de un objeto o concepto matemático las representaciones tienen un carácter imprescindible, pues los objetos de conocimiento no son perceptibles por lo que solo pueden estudiarse mediante sus representaciones. El aprendizaje en matemáticas implica pasar de un tipo de representación a otra, avanzando en el nivel de formalización de las representaciones que se usan (*Moreno y Waldegg,1992)*.

Es cuestionable pensar bajo este presupuesto, que la enseñanza de las matemáticas a partir de la presentación formal de los conceptos, produzca buenos resultados. La pobreza representacional, sobre todo si la única versión de los conceptos que se tiene es la formulación en un lenguaje sintáctico poco significativo para los alumnos, conduce a la dificultad de su aplicación en la resolución de problemas en un contexto de la realidad o de una disciplina. Dada la naturaleza de ese aprendizaje adquirido generalmente de manera restringida y memorística, los alumnos no logran transferir sus conocimientos a situaciones nuevas.

Proporcionar ambientes enriquecidos se convierte en una responsabilidad de los docentes, en donde los estudiantes tengan la oportunidad de explorar ideas, socializar sus indagaciones y construir conocimiento colectivamente, a partir de la utilización de diversidad de representaciones. Esto se logra si se favorece un ambiente de *situación problema* como contexto dentro del cual tenga lugar el aprendizaje.

El enfoque didáctico de *situación problema,* segunda idea que enmarca la propuesta, aplicado a la geometría propone entonces, privilegiar la actividad del alumno sobre la contemplación pasiva de figuras, símbolos y memorización de conceptos para desarrollar la comprensión de estos a partir de la identificación de invarianzas bajo distintas transformaciones. Se trata de que el aprendiz avance progresivamente en la comprensión y el conocimiento de la geometría mediante la formulación de problemas que le brinden múltiples oportunidades de diseñar, explorar, modelar, conjeturar, definir y argumentar para que posteriormente y cuando esté abonado el camino para ello, entienda mejor la necesidad de las definiciones y la rigurosidad de las demostraciones, en un contexto puramente matemático.

Al favorecer la indagación, el análisis y la propuesta de alternativas de solución, los problemas se constituyen en un desafío de carácter atrayente, divertido, y creativo que permiten al estudiante exteriorizar sus conocimientos previos para generar hipótesis. Al estudiar la información que aparece en un problema, organizarla e identificar las regularidades presentes en la situación surgen aspectos matemáticos relevantes y se genera nuevo conocimiento.

Construir estos ambientes se convierte en un reto para los educadores quienes no sólo deben formular problemas interesantes, sino que permanentemente deben orientar el trabajo hacia la construcción conceptual, la participación libre y espontánea, la aceptación y valoración de los aportes individuales y la expresión de las ideas, en un ambiente de buena comunicación. Afortunadamente y en relación con la ampliación de la conceptualización de la clasificación de triángulos se cuenta hoy en día con programas de geometría dinámica que no sólo favorecen el trabajo con múltiples variaciones del objeto en estudio, sino que, al estar instalados en calculadoras graficadoras con dispositivos para socializar en público las construcciones individuales, favorecen ambientes de aprendizaje de situación problema.

En contextos de geometría dinámica, como el programa Cabri Géomètre, la conceptualización de los objetos geométricos no se hace a partir de algunas pocas representaciones, pues la posibilidad de transformar de manera continua las construcciones, mediante la opción *arrastre* de una figura, permite barrer un basto campo de representaciones asociadas. Las propiedades de las figuras emergen como los invariantes de las representaciones cuando se someten al movimiento. La posibilidad de exploración del comportamiento de las figuras geométricas permite una interpretación matemática de las mismas y favorece la conceptualización.

Al tener entonces un contexto dinámico de exploración se favorece además en la clase, un ambiente de construcción de conjeturas y el deseo de presentar a los compañeros las producciones individuales o grupales. Las propuestas a los problemas matemáticos son validadas mediante la argumentación, la socialización y el intercambio colectivo de experiencias llegando por último, a la generalización de acuerdos conceptuales orientados por el profesor.

3. DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

La situación problema: *"Dado un segmento AB ubicar un punto P fuera del segmento de tal manera que al unirlo con segmentos a los extremos de A y B, se forme un triángulo isósceles y continúe siéndolo aun después de mover el punto o el segmento iniciales"* . Esta experiencia tuvo como propósito ampliar la conceptualización en la clasificación de triángulos y fue propuesta a los estudiantes de grado sexto de básica secundaria del Colegio Distrital República de Costa Rica, los cuales trabajaron por parejas, con una calculadora, que tiene incorporado el programa Cabri. Previamente a la aplicación de esta situación didáctica, los estudiantes trabajaron en la noción de triángulo y en la construcción de triángulos escalenos. Es decir, aproximadamente se realizaron cinco sesiones previas que permitieron que los estudiantes adquirieran cierta habilidad instrumental al usar la calculadora y conocieran las opciones básicas de indagación acerca de propiedades geométricas.

La propuesta didáctica abordada para el trabajo en el aula fue la de situación problema. Los alumnos propusieron construcciones, resultado de la exploración libre con la calculadora, luego, el grupo validó dichas propuestas; finalmente se socializaron y generalizaron los acuerdos.

La aplicación de este tratamiento permitió a los estudiantes avanzar en la construcción de estrategias para obtener familias de triángulos isósceles. De manera simultánea y como consecuencia de la necesidad de utilizar la mediatríz como herramienta conceptual en la construcción de este tipo de triángulos, se produjo el acercamiento intuitivo a la noción de mediatriz, situación que fue favorecida por la calculadora. Se desarrollaron métodos no previstos pero válidos, a partir de procesos exclusivamente dinámicos y experienciales. Se emplearon dos unidades de clase de 90 minutos cada una.

4. PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS POR LOS ESTUDIANTES

Una pareja de estudiantes logró acercarse a la solución del problema por un método un tanto informal. Caracterizó la ubicación del punto como aquel que debía estar " *Arriba del segmento, y como en la mitad"*, pero pensaron en un solo triángulo y no en la posibilidad de utilizar un punto externo móvil con ciertas restricciones para obtener una familia de triángulos isósceles. Estos estudiantes no plantearon la construcción del triángulo en términos de objeto geométrico, sino de dibujo. A pesar de la limitación del aporte, se constituyó en elemento importante para avanzar en la solución del problema, en el momento de la socialización. El siguiente fragmento de la clase y la figura 1 muestra lo acontecido.

Profesor: ¿Qué hacen?
Estudiante: Estamos dibujando un punto que no esté en el segmento
Profesor: ¿Dónde lo van a dibujar?
Estudiante: Arriba del segmento, y como en la mitad para que queden iguales los otros lados
Profesor: ¿En la mitad?
Estudiante: Si, porque si lo movemos para un lado se descuadra y para el otro también.

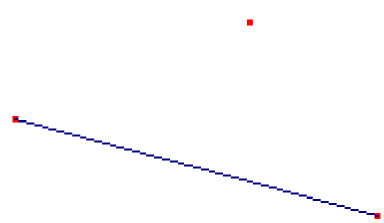


Figura 1

Otra pareja de estudiantes agregó a la idea planteada por la pareja anterior, que el punto P además debía ser movido en una dirección determinada:

“se mueve hacia arriba en línea recta , porque para otros lados se cambian las medidas”.

Curiosamente en vez de utilizar la herramienta *rect,a* de Cabrí, utilizaron una regla de madera sobre la pantalla para ejemplificar el movimiento alineado del punto. Combinaron dos tecnologías, mostrando que aunque se ha enfatizado en el uso del Cabrí, aún hay dependencia de los estudiantes con tecnologías no dinámicas para ciertas situaciones geométricas. Esta segunda pareja logró avanzar más, identificó que el punto debía desplazarse en una dirección determinada. Idea que fue expresada así:

“el movimiento en linea recta del punto P tiene que ser por la mitad del segmento y seguir derechito”.

Al solicitarles que se valieran de alguna herramienta de la calculadora para representar lo que decían, utilizaron *vector.* Esta caracterización que los estudiantes hicieron del movimiento del punto P, se constituyó en un valioso acercamiento intuitivo al concepto de *Mediatriz*, herramienta necesaria para construir una familia de triángulos isósceles a partir del segmento AB. (Ver figura 2). La calculadora y específicamente el programa Cabri, se consolidó como un instrumento mediador importante para este descubrimiento a través de su dinamismo.

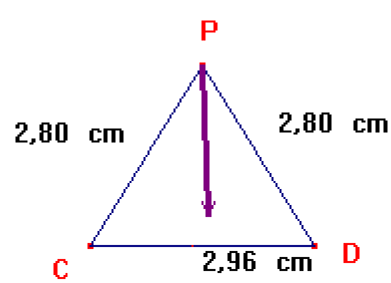


figura 2

Al final de la socialización, Alejandro un estudiante, a su manera y empleando un lenguaje informal, sintetizó las condiciones que el punto externo P movil debía reunir: *este punto al moverlo hacia arriba y utilizando la huella de Cabri, dejaba un camino recto que para mantenerse equidistante de A y B debía partir del punto medio del segmento*. De esta manera el triángulo isósceles construido cumpliría la condición dada. Para dar una explicación utilizó la herramienta *punto medio* y la aplicó al segmento AB construido por él y posteriormente activó la traza del punto P y lo movió de forma perpendicular al segmento .

El siguiente fragmento y la figura 3 describe el análisis hecho por el estudiante Alejandro:

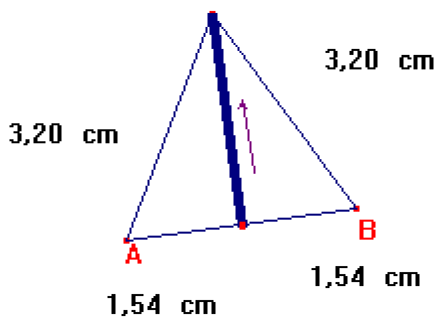


figura 3

E: Muevo el punto hacia arriba y hacia abajo porque si se va a los lados se daña. (Refiriéndose al punto externo)

P: La calculadora tiene una herramienta que nos puede ayudar, la huella o traza. Usémosla. (Sugirió la docente al estudiante).

E: La huella que deja es una línea. Una línea recta.

P: ¿Al mover ese punto externo se afectan los lados del triángulo?

E: No, siguen iguales

P: ¿Qué huella dejó el punto externo?

E: Sigue un camino recto. Si lo muevo a los lados se descuadra

P: ¿Recto con respecto a quién?

E: En la mitad del triángulo. Donde inició el recorrido.

P: ¿Donde lo inició?

E: En el punto medio del segmento

Estos acuerdos permitieron a la docente sugerir que utilizaran la herramienta *recta perpendicular y punto medio* de Cabri para trazar el camino caracterizado por ellos. Tiempo después y después de haber formalizado con los estudiantes la definición de mediatriz se utilizó la herramienta mediatríz de la calculadora para construir triángulos isósceles.

5. CONCLUSIONES

Los conceptos de perpendicular, punto medio y mediatriz no fueron abordados por los estudiantes de manera directa para solucionar el problema debido a que no se habían trabajado en clase, ni en este curso ni en anteriores. Sin embargo, el planteamiento informal que hicieron, permitió obtener una idea intuitiva de éstos a partir de la experimentación realizada en la calculadora.

Las experiencias realizadas en el programa Cabrí, movilizaron de una manera muy particular la conceptualización de triángulos isósceles. Los estudiantes hallaron puntos externos, que equidistaban de los extremos de un segmento dado para formar lados congruentes y obtener así triángulos isósceles.

A pesar de haber definido previamente los triángulos isósceles, el dinamismo del programa Cabrí permitió a los estudiantes descubrir propiedades que ampliaron su conceptualización. Fue posible para ellos, a partir de la traza activada y la caracterización que hicieron del punto externo P no solo construir un triángulo, sino una familia de triángulos isósceles.

Los nuevos roles asumidos por estudiantes y docentes en un ambiente de situación problema, desarrollan y mejoran la comunicación hablada y escrita. El clima de confianza, respeto y tolerancia que se crea, permite a los estudiantes aprender matemáticas socialmente. Es decir, a través de diálogos inicialmente espontáneos, fruto de sus vivencias y conocimientos previos, empleando un lenguaje cotidiano. Y posteriormente, poco a poco y con la orientación del docente, construyeron un lenguaje más elaborado, el cual incluía vocabulario matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

MORENO L. Y WALDEGG G. . Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas. En RICO l (eds.). Didáctica de las Matemáticas, capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

SANTOS L. M. (1996) Didáctica, Lecturas. Principios y métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberioaméricano

De Guzmán M. (1991) Para pensar mejor, editorial Labor, España.

Duval, R (1996): Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 16/3. Num. 48. p. 348-382.

(Rico y Romero, 1999) Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. REVISTA EMA Vol. 4, No. 2, Marzo de 1999 Una empresa docente *117-151*

ESTRATEGIAS ARGUMENTATIVAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS USANDO CABRI GÉOMÈTRE

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Autónoma de Coahuila, México
isandoval@mate.uadec.mx

Un problema que siempre ha sido central para la enseñanza de la geometría es la confusión entre los dibujos y los objetos geométricos. Esta problemática está vinculada con la interacción entre las ideas de dibujar y construir y las diversas maneras de interpretar una representación geométrica. Dicha interpretación incide en el paso del dibujo al objeto geométrico y depende, en cada individuo, de sus conocimientos y del contexto. El objetivo de este artículo es mostrar algunas de las estrategias argumentativas que utilizan los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos usando Cabri Géomètre. La fase de experimentación se realizó con estudiantes de preparatoria que no tenían experiencia previa en el manejo de este programa. Esta fase se desarrolló en dos etapas: familiarización con Cabri y la experimentación propiamente dicha. En cada sesión de trabajo los estudiantes trabajaban primero en equipos y luego, se realizaba la plenaria. En cada sesión, un equipo diferente es video-grabado y otro es audio-grabado.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas de interés entre Educadores Matemáticos, en los últimos años, se relaciona con la demostración y las matemáticas escolares (por ejemplo, Mariotti *et al*., 1997; Arzarello *et al.*, 1998; De Villiers, 1999; Balacheff, 1999; Hanna, 2001; Furinghethi *et al.*, 2001, 2002; Olivero & Robutti, 2001, 2002; Heinze & Ossietzky, 2002; Küchemann & Hoyles, 2002). Y más aún, con el desarrollo e introducción de programas de Geometría Dinámica, en diferentes sistemas educativos.

Hoy en día, se vuelve a plantear problemas que siempre han sido centrales para la enseñanza de la geometría, por ejemplo, la confusión entre los dibujos y los objetos geométricos. Esta problemática está vinculada con los procesos de visualización[1], construcción y su relación con el razonamiento. Las dificultades propias del problema, en este estudio, se consideran relacionadas con la interacción entre las ideas de dibujar y construir y las diversas maneras de interpretar una representación geométrica. Dicha interpretación incide en el paso del dibujo al objeto geométrico y depende, en cada individuo, de sus conocimientos y del contexto.

Una posible causa, de la confusión entre dibujo y objeto geométrico, puede ser las formas de representación utilizadas para esas ideas geométricas. Por lo tanto, sería necesario describir y analizar lo que sucede cuando se utilizan nuevas tecnologías de representación, como la Cabri Géomètre (Cabri), para ilustrar dichas ideas.

Por otro lado, la argumentación y la demostración movilizan ideas matemáticas al estudiante. Esta movilización permite al profesor ver y apreciar cuál es la comprensión matemática que tiene el estudiante. Por ello, el trabajo que estamos reportando apunta a investigar *¿Cómo modifica Cabri las estrategias argumentativas de los estudiantes?*

[1] Los procesos de ***visualización*** permiten vincular un acto perceptivo (dibujo) con la teoría. Es decir, “ver” a través de la representación.

2. ORIENTACIONES TEÓRICAS

Las nuevas tecnologías suministran un amplio abanico de representaciones de un objeto matemático y de relaciones. Las tradicionales representaciones analíticas y de carácter estático, se han visto ampliamente enriquecidas con estas nuevas tecnologías. En particular, la Geometría Dinámica proporciona un campo de exploración que no es factible con las representaciones con lápiz y papel. La representación que genera es *dinámica*, en la cual las propiedades geométricas permanecen inalterables cuando los objetos de deforman según el arrastre (*dragging*).

Existe diferencia entre dibujar y construir. Consideramos que *dibujar* equivale a reproducir la imagen mental que se tiene de una figura, mientras que *construir* equivale a utilizar las propiedades de la figura para obtener una representación de ella. Por lo tanto, la reproducción de una imagen mental no captura propiedades intrínsecas del objeto reproducido (mediante un dibujo) mientras que la utilización de las propiedades estructurales para representar (lo que hace Cabri) es otra historia: es la puesta sobre la pantalla de los objetos ideales traídos mediante un instrumento que *reconoce* la estructura. Eso es lo que hace el *dragging*.

Para analizar las estrategias argumentativas utilizadas por los estudiantes como resultado de la interacción con Cabri, es necesario entender la clase de manipulación que los estudiantes han efectuado sobre los objetos informáticos, así cómo las herramientas utilizadas durante cada sesión de trabajo, para resolver las actividades propuestas.

2.1. Modalidades de arrastre y de medición.

De acuerdo al propósito implícito en los estudiantes, Arzarello, *et al*. (1998), proponen la siguiente clasificación del arrastre:

a. ***Arrastre sin ruta, aleatorio.*** El arrastre no lleva ninguna dirección ni objetivo y busca descubrir alguna propiedad o configuración interesante.

b. ***Prueba del arrastre***. El arrastre tiene como propósito poner a prueba la construcción, sus límites de validez, las interdependencias de los elementos de la construcción.

c. ***Arrastre dirigido.*** El arrastre busca encontrar una posición específica de un cierto lugar geométrico que conserve una cierta regularidad.

Otra de las herramientas potenciales de Cabri son las medidas. Su uso sistemático, aunque fomenta la percepción, posibilita la transición hacia la teoría (Olivero & Robutti, 2001). El anclaje en lo perceptivo puede darse, por ejemplo, cuando los estudiantes confían acríticamente en las medidas y las consideran como absolutamente exactas. Las modalidades usadas en esta transición son:

a. ***Medidas como exploración aleatoria.*** Cuando los estudiantes no tienen ninguna idea exacta sobre la configuración, toman medidas de algunos elementos de la configuración y exploran.

b. ***Medidas como exploración dirigida.*** Las medidas son utilizadas para poner en orden diversos casos y explorarlos.

c. ***Medidas probatorias.*** Son utilizadas como un medio para revisar la validez de una percepción.

El paso de un nivel perceptivo a un nivel teórico significa alejarse de un empirismo ingenuo. Ahora bien, cuando los estudiantes usan las medidas como herramienta de control bien sea para verificar una predicción, validar conjeturas o encontrar relaciones lógicas que pueden contribuir a la construcción de una argumentación válida, se puede decir, que las medidas se están usando en otro nivel, transición de lo teórico a lo perceptivo.

3. METODOLOGÍA

En la fase experimental participaron catorce alumnos con conocimientos elementales de Geometría y sin experiencia previa en el manejo de Cabri. Estos conocimientos fueron detectados mediante un cuestionario. La selección de los participantes se basó en dichas respuestas. La experimentación se realizó en una preparatoria de la Ciudad de México durante tres meses, en horas fuera de clase. La participación fue voluntaria y no estuvo sujeta a calificación alguna.

Esta fase se desarrolló en dos etapas. La primera de familiarización con Cabri y la experimentación propiamente dicha. Cada sesión de trabajo se dividió en dos partes: 1) Desarrollo de la actividad en equipos de máximo tres estudiantes y 2) una discusión plenaria. En cada sesión, un equipo diferente es video-grabado y otro es audio-grabado. La plenaria fue desarrollada en la misma sesión o en la siguiente (dependiendo del tiempo de los estudiantes).

4. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS: EJEMPLO DE UN PROBLEMA ABIERTO

Enunciado del problema:

***A* es el centro de un círculo y *AB* es un radio. Construye la mediatriz del radio *AB*.** (*La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos partes iguales.*). **En uno de los puntos donde la mediatriz corta al círculo coloca un punto *C*. Une los puntos *A, B* y *C*.**

¿Qué figura se obtiene al unir los puntos A, B y C? Características
¿Es siempre la misma figura? Sí______ No ______ Justifica tu respuesta
Escriban un enunciado para la propiedad descubierta anteriormente.
Elaboren una explicación que apoye su observación.

Este problema se puede resolver de diferentes formas, las cuales se evidencian en el trabajo de los alumnos. De las cuatro maneras que se encontraron, sólo reportaremos dos.

4.1. Antecedentes del problema

Este problema fue planteado en el cuestionario de manera que pudiera resolverse con lápiz y papel. La mayor dificultad a la que se enfrentaron los estudiantes fue comprender el enunciado del problema, esto se evidenció en sus argumentos y en sus representaciones figurales. Además, el dibujo se convirtió en un obstáculo para la mayoría. Esto ratifica lo encontrado por Pluvinage (1998) y Sandoval (2001).

4.2. Estrategias argumentativas usadas con Cabri

En la primera parte de esta actividad, los alumnos se organizaron en siete equipos. Una vez hecha la construcción, la primera estrategia para establecer el tipo de figura formada fue utilizar la medición. La conclusión a la que llegaron seis equipos fue que el triángulo era equilátero porque sus lados eran iguales y cada uno de los ángulos internos medía 60°.

Además, cinco equipos, establecieron la primera relación geométrica: los segmentos AC y AB son radios de la misma circunferencia y por tanto, son iguales.

Ejemplos de la Plenaria. Estrategia 1. La estrategia dada por Nancy y Enrique muestra que lograron "ver" la sub-configuración formada por la mediatriz y el radio AB, dos triángulos rectángulos. La explicación dada se apoya en la definición de mediatriz. Enrique, oralmente, explicita que la mediatriz divide al radio AB en dos partes iguales y forma triángulos rectángulos. Además, que los segmentos AB y AC son radios de la misma circunferencia.

Este equipo ilustra sus afirmaciones en la construcción hecha en Cabri por otro estudiante. En su intervención, Enrique muestra un control conceptual parcial, esto es, la relación entre los radios de la circunferencia. Cabe destacar que en esta representación no se utilizó el comando de la medición y su razonamiento fue sobre la figura estática.

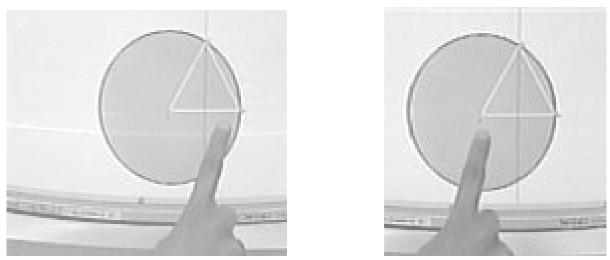


Figura 1. Explicación dada por este equipo para explicitar los dos triángulos rectángulos generados por la mediatriz.

Nancy: "*Yo pensé que era porque la misma medida que había en este lado* [señala el segmento AO[2]], *había en este otro* [señala el OB]. *Y entonces también aquí la altura* [la señala y se refiere a OC] *donde se intersectaban era la misma. Y al unirlos pus la medida iba a ser igual de los dos lados*."

Investigadora: "*¿Cuál medida?*"

Nancy: "*La de este lado* [señala el segmento AC] *y la de este* [señala el segmento BC]."

En la descripción de Nancy se evidencia la percepción de una sub-configuración: La mediatriz divide al triángulo ABC, en dos triángulos rectángulos AOC y BOC.

Los estudiantes en estos momentos no conocen criterios de congruencia de triángulos, o por lo menos no lo recuerdan, pero parece que es la explicación que quieren dar. En esta parte de la discusión no se concluyó con una argumentación completa del problema planteado.

Estrategia 2. Jorge es quien presenta una primera explicación completa, a pesar de no haber participado en la sesión de trabajo en equipos. Él hace una construcción dadas las características del enunciado y la describe. Este procedimiento es similar al esbozado por Enrique pero mucho más sistematizado.

Jorge: "*Ya hicimos el segmento del punto este* [señala el punto A] *a la circunferencia* [se refiere al radio AB]. *Se supone que siempre el radio de la circunferencia va a ser el mismo de cualquier lado* [señala a diferentes puntos de la circunferencia]. *Bueno, ya hicimos la mediatriz. La mediatriz pasa por el punto medio de la recta* [señala el radio, segmento AB], *lo tomamos como altura. Entonces tomamos el punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia. Entonces se supone que un radio siempre va a tener la misma longitud del punto donde se tome. Entonces, esta longitud* [señala el segmento AB]

[2] Para efectos descriptivos, denotaremos a O como el punto medio del segmento AB.

siempre va a ser la misma que esa [señala el segmento AC]. *Entonces, esto* [señala el segmento AC] *va a ser lo mismo que esto* [señala el segmento BC].”

Cabe destacar que el dibujo electrónico que presenta este alumno no tiene ninguna medida.

Investigadora: “*¿Y por qué?* [Haciendo referencia a la afirmación hecha por Jorge].”

En un principio Jorge no logra dar un argumento para apoyar su afirmación generándose un intercambio de ideas entre todo el grupo. Sin embargo, después de un rato, este alumno presenta la siguiente idea, relacionada con la superposición de segmentos (Ver Figura 2).

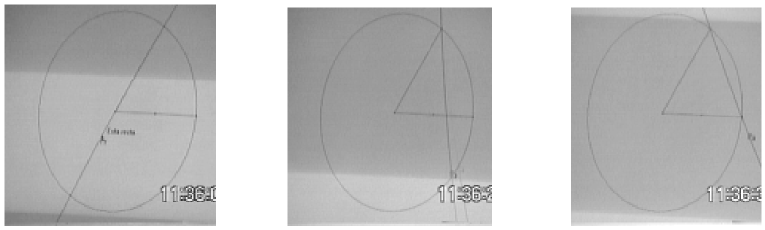


Figura 2. Secuencia de la idea de Jorge

Jorge: “*Bueno, primero, construí todo como ya lo sabemos. Luego, después de la mediatriz la oculté y puse una recta por el punto donde se intersecta el segmento éste* [señala al segmento AC] *y la circunferencia. Entonces, ya puse una recta entonces la empecé a mover. Entonces, ví que en este punto* [se refiere al punto A] *donde ésta parte el segmento [...] Bueno, es que, se supone que esta recta* [se refiere a la recta que está superpuesta en el segmento AC] *mide de aquí* [indica el punto C] *a acá* [indica el punto A]*, lo mismo que el segmento* [se refiere al segmento AC]. *Entonces moví esta recta* [se refiere a su recta auxiliar y la arrastra hasta el punto B] *a acá, entonces me di cuenta que puede ser la longitud, luego medí de aquí* [se refiere al punto B] *acá* [se refiere al punto C] *y me dio. Lo que no puedo crear es el punto en la recta para que pueda explicarle bien y que sea verdadera. Que sea verdad lo que digo.*”

La investigadora interviene para solucionar el problema: Uso del comando de **Compás**[3]. Jorge retoma su explicación.

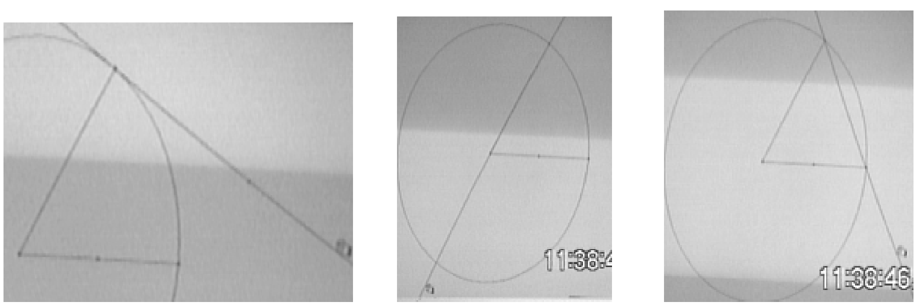


Figura 3. Secuencia de la estrategia argumentativa usada por Jorge

Jorge: “*Ya puedo explicar. Ahora si puedo mover. Entonces este punto choca* [se refiere al creado con el compás sobre la recta, que en adelante se denotará como P] *en el punto de esta circunferencia de este segmento* [se refiere al punto A] *con este* [se refiere al punto B]. *Entonces ahí identifique que sí, que puede medir lo mismo.*”

Dicha argumentación convence a la mayoría de los estudiantes, por lo que las intervenciones subsiguientes son para complementar dicha explicación.

Gladis: “*Ahorita lo que hizo él es transferir la medida de un lado, ¿no?, a la recta. Se supone. Bueno según yo si es lo correcto puesto que lo que está del lado* [se refiere a la longitud del segmento AC] *que*

[3] También se podría usar el comando **Transferencia de Medidas** pero una de las restricciones era no usar mediciones.

transfirió a la recta es el radio. Y es la misma medida que tiene abajo [se refiere al segmento AB] *ya que los dos de sus medidas son radios. Entonces la otra si corresponden[...]*"

En este momento emerge la incertidumbre en Camila, ella no está convencida del estatuto teórico del compás. Esto se evidencia en la siguiente pregunta:

Camila: "*Pero, ¿las rectas si están bien?*"
Enrique: "*Sí. Si no mídela.*"

En ese momento, Jorge mide los dos segmentos que son los radios y también la distancia de C a P. En este momento la medición se utiliza como un medio para verificar lo afirmado teóricamente, esto es, en la transición de lo teórico a lo perceptivo. Con esta intervención se dio por terminada esta sesión. La explicación sólo quedó a nivel oral.

5. ALGUNOS COMENTARIOS

Todos los equipos conjeturaron que el triángulo formado por los puntos A, B y C era equilátero, y lo justificaron (inicialmente) con la medición y el arrastre, en *modalidad probatoria*. El arrastre fue utilizado en diferentes modalidades. La *modalidad de arrastre sin ruta o aleatorio* fue usado, por los estudiantes, cuando no tenían explicación a sus conjeturas o no sabían que hacer. En algunas ocasiones el arrastre se utilizó junto con las medidas.

La prueba del arrastre fue utilizado para validar la construcción. En un inicio fue sólo a nivel perceptivo, después se incluyó la medición para validar dicha percepción, complementándose entonces con una verificación numérica.

Un ejemplo de *arrastre dirigido* es cuando Jorge explica *porqué* los tres segmentos son iguales mediante el método de superposición. El caso de Jorge ilustra el uso del arrastre y medición en la transición de lo perceptivo a lo teórico y viceversa.

Como resultado de la interacción con Cabri, todos los equipos establecieron parcialmente la explicación del porqué el triángulo ABC era equilátero. Esta justificación (incompleta) se fundamentó en la relación entre los radios de la misma circunferencia. Lo anterior manifiesta un posible cambio del estatuto de la representación, esto es, de una interpretación como dibujo hacia una más cercana al objeto geométrico.

Por lo tanto, se puede afirmar que estas dos herramientas (arrastre y medición) propias de Cabri permitieron a los estudiantes confrontar su percepción con la teoría interna de la máquina como un mecanismo de control.

Las estrategias argumentativas fueron evolucionando de perceptivas (de un nivel empírico) a unas más geométricas (argumentos basados en elementos teóricos), por lo menos en la argumentación oral. La vinculación entre el acto perceptivo y el teórico, se manifestó en que los estudiantes recurrieron a la teoría (que controla el dibujo electrónico) a través de las herramientas propias de Cabri.

La argumentación dada por Jorge muestra una estrategia argumentativa que ilustra un razonamiento dinámico. Esta estrategia evidencia control conceptual de lo que él ve en la pantalla (proceso de visualización), siendo el arrastre una herramienta fundamental en dicho proceso. La medición en este caso, fue utilizada, como lo plantean Olivero & Robutti (2001a), en la transición de lo teórico a lo perceptivo. El razonamiento esbozado por este estudiante se fundamentó en la relación entre los radios de la misma circunferencia y el estatuto teórico del compás.

En consecuencia, las estrategias argumentativas fueron evolucionando de lo *intuitivo* basado en la percepción de la forma (apariencia), pasando por lo *empírico* basados en resultados numéricos de varias representaciones hasta una *argumentación con rasgos de formalismo matemático*, aunque únicamente a nivel oral. Por otro lado, se evidencia que la interacción y el debate global fueron el motor que impulsó a los estudiantes a explorar diferentes ideas para encontrar una mejor explicación a su conjetura. Esta interacción, también puso de manifiesto la importancia de la colaboración entre todos, la presentación y exploración de ideas, y la ayuda mutua en la implementación dinámica de las mismas.

6. CONCLUSIONES

Dentro las principales conclusiones preliminares se pueden resaltar las dos siguientes. Primera, el dibujo electrónico proporcionó a los estudiantes un nivel mayor de evidencia que un dibujo en papel y lápiz. Este dibujo electrónico es un espejo del universo interno de la máquina y por ende, está más cerca del objeto geométrico. Segunda, las representaciones ayudan a los estudiantes a: i) producir conjeturas, ii) listar el procedimiento seguido en una construcción y iii) describir tal procedimiento tanto en forma verbal como escrita. Dadas las características del dibujo electrónico y al mecanismo de control que obedece a la teoría interna de la máquina, parece posible la existencia de un puente entre la evidencia geométrica de Cabri y la argumentación geométrica. Por ejemplo, en la Actividad 2, inicialmente la argumentación dependió de la evidencia de Cabri (medidas y arrastre), sin embargo, con la intervención de la investigadora y dado el diseño de la hoja de trabajo se logró una argumentación con un nivel superior de formalización, más descontextualizado. Por lo tanto, cuando el estudiante interactúa con un dibujo electrónico es más posible que se de el proceso de visualización, esto es, el poder conectar lo que percibe en la representación con la teoría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARZARELLO, Ferdinando; MICHELETTI, Chiara; OLIVERO, Federica & ROBUTTI, Ornella (1998). Dragging in cabri and modalities of transition form conjectures to proofs in geometry. *PME XXII Stellenbosch* (2) 32-39

BALACHEFF, Nicolas (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación al debate. http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme /990506ThemeEs.html

DE VILLIERS, Michael (1999). *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad*. Key Curriculum Press.

FURINGHETTI, Fulvia; OLIVERO, Federica & PAOLA, Domingo (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshopts in a classroom. *Internationational Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32 (3), 319-335

FURINGHETTI, Fulvia & PAOLA, Domingo (2002). Defining within a Dynamic Geometry environment: Notes from the classroom. *PME26* (2), 392-399

HANNA, Gila (2001). Proof, Explanation and Exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics* 44: 5–23. Publishers. Printed in the Netherlands.

HEINZE, Aiso & OSSIETZKY, Carl von (2002). "Because a square is not a rectangle". Students' knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. *PME26* (3) 81-88

KÜCHEMANN, Dietmar & HOYLES, Celia (2002). Students' understanding of a logical implication and its converse. *PME26* (3) 241-248

MARIOTTI, Maria Alexandra; BARTOLINI BUSSI, Maria G.; BOERO, Paolo; FERRI, Franca & GARUTI, Rossella (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: from History and Epistemology to Cognition. En *PME21*. Lathi, Finland, (1) 180-195.

MARIOTTI, Maria Alexandra (2001). Introduction to Proof: The mediation of a Dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics* 44: 25–53. Publishers. Printed in the Netherlands.

OLIVERO, Federica & ROBUTTI, Ornella (2001). Measures in Cabri as a bridge between Perception and Theory. *PME XXV* (4) 9-16

OLIVERO, Federica & ROBUTTI, Ornella (2002). How much does Cabri do the wok for the students? *PME 26* (4) 9-16

PLUVINAGE, François (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del conocimiento. *Investigaciones en Matemática Educativa*. Editorial Iberoamérica. México, 1-16.

SANDOVAL CÁCERES, Ivonne Twiggy (2001). *Visualización y Razonamiento Geométrico*. Tesis de Maestría del Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Los materiales oficiales (SEP) replanteados con la geometría dinámica

Jorge Alonso Pérez Huerta
Licenciado en Educación Media

Introducción

La Secretaria de Educación Pública ofrece a todos los Profesores del País diversos materiales tales como: *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria*, la *Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas* y el *Fichero. Actividades didácticas, Matemáticas. Educación Secundaria.* Los cuales ofrecen una orientación más precisa sobre el tratamiento de los contenidos matemáticos, concebidos en los Planes y Programas de Estudio de educación secundaria.

Las áreas en las que está divididas los Planes y Programas, en lo que corresponde a la asignatura de Matemáticas son las siguientes: ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, PRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y NOCIONES DE PROBABILIDAD.

Los Profesores encontramos en estos materiales el desarrollo del enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas siendo preciso enriquecer los diversos recursos que disponemos para auxiliar a los alumnos al desarrollo de habilidades, fomentar valores y la adquisición de conocimientos matemáticos.

La geometría en la educación secundaria

El desarrollo de habilidades tales como la de *calcular, inferir comunicar, medir, imaginar, estimar, generalizar y deducir,* permite que el alumno adquiera una formación y adquisición conocimientos capaz de resolver problemas en los cuales se pueda encontrar involucrado.

Es el docente el que debe proveer las herramientas necesarias para lograr aprendizajes significativos, con base en la elección de situaciones problemáticas que permitan la socialización y confrontación de ideas, lo que genera un interés por aprender matemáticas.

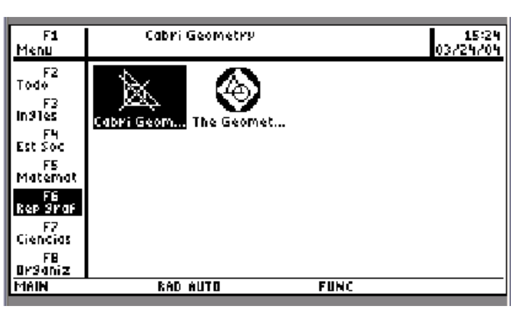
La geometría en la escuela secundaria tiene un proceso previo: llegan con cierto desarrollo aprendida en la primaria; lo que permite al profesor tener un desenvolvimiento hacia estructuras cada vez más complejas que permitan explorar propiedades geométricas de figuras logrando una descripción del entorno que nos rodea.

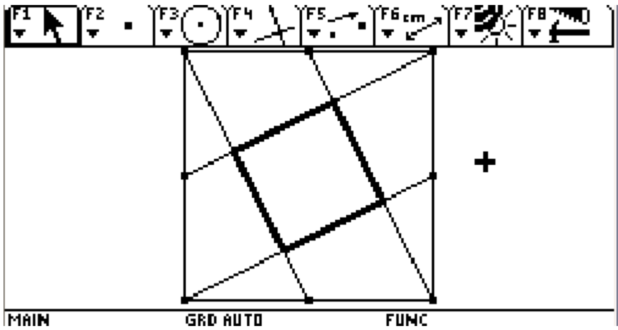
La geometría dinámica

En Francia, en el año de 1985 Jean-Marie Laborde propone la creación de un cuaderno-borrador interactivo para la geometría, Cabri-géomètre, permitiendo una exploración sobre características de los objetos de la geometría y de sus relaciones.

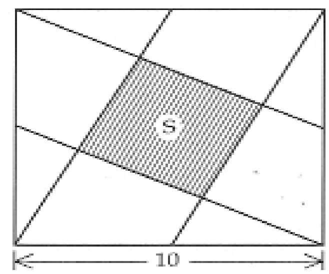
A partir de la segunda edición del texto *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación Secundaria* se hace referencia de los “Materiales manipulables y las nuevas tecnologías” (pags. 20 y 21). No sólo menciona al programa *Cabri-géomètre,* también a El géometra (*The Geometer’s Sketchpad)*. Además de que existen en la internet otros programas que también permiten una geometría dinámica, como: *Dr. Geo, Geup,* etc.

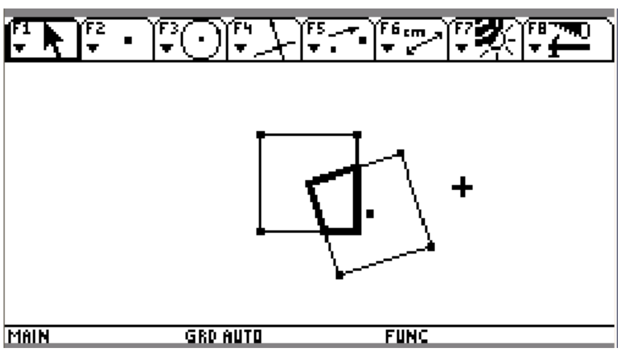
El reciente desarrollo tecnológico ha hecho que resurja el interés por utilizar técnicas visuales como uno de los principales elementos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje. En un ambiente de geometría dinámica podemos manipular interactivamente objetos matemáticos geométricos mediante la aplicación de software o bien mediante el uso de calculadoras graficadoras *(Casio, Texas Instruments)*.

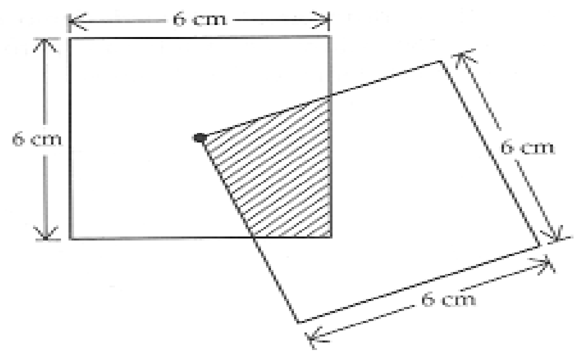


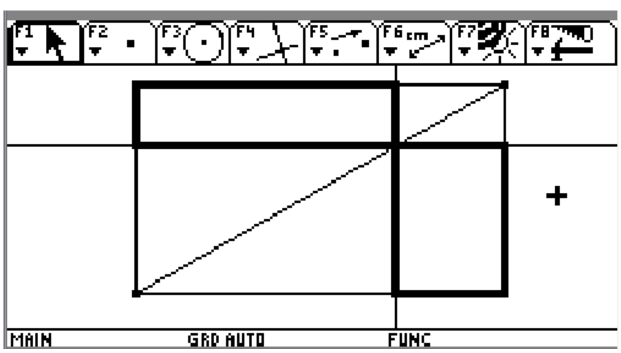


3. ¿Cuál es el área de la parte sombreada S?

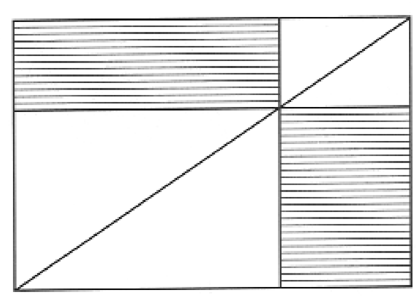


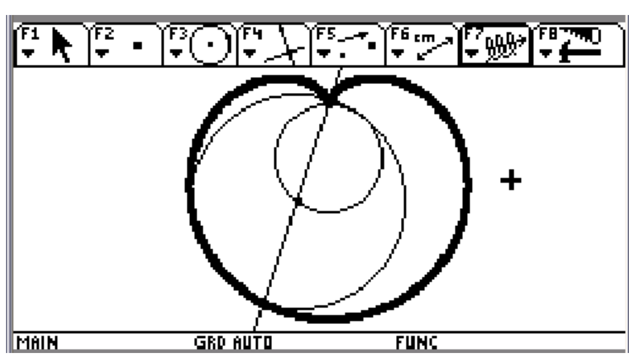






5. ¿Tienen la misma área las dos partes sombreadas de la figura siguiente?





3. Traza un círculo de 2 cm de radio, marca un punto de su circunferencia y llámalo A, luego:

a) Toma otro punto M_1 sobre la circunferencia y traza la recta que pasa por A y M_1.

b) En la recta que pasa por A y M_1, marca con rojo los puntos N_1 y P_1 que satisfacen:

$$M_1N_1 = M_1P_1 = 4 \text{ cm}$$

Continúa el mismo proceso tomando muchos puntos M_2, M_3, M_4, ..., sobre la circunferencia (verás aparecer una curva que los matemáticos llaman *conchoide del círculo*). □

GENERALIZACION, FORMALIZACION Y ABSTRACCION EN CABRI

Leonor Camargo Uribe
Profesora de la Universidad Pedagógica Nacional [1]
Bogotá, Colombia

Reflexión inicial

En el artículo *Meaning mathematically with computers (1997),* Noss y Hoyles nos hacen caer en cuenta que, quienes trabajamos en el campo de la educación matemática, a nivel escolar, nos enfrentamos frecuentemente a un dilema bastante delicado:

¿Cómo tratar con la naturaleza general y formal de las proposiciones matemáticas que forman parte de una cultura matemática universal, y al mismo tiempo, con la necesidad de admitir que el conocimiento que un estudiante construye, produce o asimila se da siempre mediado por un contexto, y que dota de significado los conceptos matemáticos?

El interrogante tiene tres componentes:

(i) sin generalización y formalización, no podemos decir que nuestros alumnos hacen matemáticas, pues en la formalización está la esencia de las matemáticas.
(ii) sin embargo, la formalización es vista frecuentemente como un obstáculo insuperable para comprender los significados de los conceptos matemáticos,
(iii) pero, sin significados, tampoco hay conocimiento matemático útil!

En el campo de la didáctica, la construcción de respuestas al interrogante, tiene que ver con encontrar una forma de caracterizar la actividad matemática escolar si respetamos la forma como la matemática se va construyendo como ciencia, pero simultáneamente respetamos la manera cómo funciona la cognición del estudiante.

Si atendemos únicamente a la forma como procede la matemática (modelo curricular de las matemáticas modernas) tendríamos que pensar en la construcción de sistemas axiomáticos que atienden aspectos estructurales de los conceptos y propiedades matemáticos, comunicados en un lenguaje riguroso que incorpora el uso de cuantificadores como recurso de generalización. Así por ejemplo, Hilbert en la introducción de sus fundamentos de Geometría (1899) escribió que el significado de los puntos, las líneas, los planos era algo determinado únicamente por las relaciones que se establecen ellos, pues lo importante en matemáticas era la lógica interna del sistema, al margen de los significados “intuitivos” que podamos asociar a los términos. Dado el alto grado de sistematicidad de la matemática, respetar la forma de construcción de esta ciencia nos obliga a atribuir los significados de los objetos matemáticos a las relaciones que se establecen entre ellos y no a su nexo con la realidad.

---

[1] Este artículo es resultado del trabajo realizado en el marco del proyecto *Desarrollo del razonamiento a través de la Geometría Euclidiana* realizado entre 1999 y 2002 con el apoyo del Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional, CIUP.

De otro lado, si pensamos en la cognición del estudiante (como nos lo demandan las reformas curriculares actuales) tendríamos que pensar en actividades de inducción empírica que van de lo particular a lo general. Esta forma de buscar regularidades es la manera usual como los seres humanos buscamos organizar nuestras experiencias. Esta es una actividad connatural a la especie humana que ha sido uno de los pilares sobre los que ha descansado su supervivencia y su desarrollo social y cultural y tiene que ver con la manera como procedemos cognitivamente, estableciendo relaciones existentes entre los conceptos y la realidad que reflejan y atribuyendo significado a los conceptos, según las experiencias que vivimos.

Si, como educadores matemáticos, respetamos estas dos maneras de proceder, ¿qué camino podemos elegir? La tendencia en los últimos años ha sido prestar atención a los procesos cognitivos que desarrollan los estudiantes cuando aprenden y a los significados que le dan a conceptos matemáticos, en conexión con sus experiencias vitales. Entonces, actividades matemáticas como generalizar y formalizar han sido "adaptadas" más en función de su caracterización como procesos cognitivos espontáneos, que como actividades matemáticas que atienden a una lógica interna de la disciplina y que están en su esencia.

En ese sentido, considero que las actividades de generalización y formalización, como actividades matemáticas propiamente dichas, se han dejado de lado, y no permitimos que los estudiantes avancen en el aprendizaje de las matemáticas más a allá de una ingenua caracterización como ciencia empírica.

¿Cómo vincular las actividades que son significativas para los estudiantes, con los procesos de generalización y formalización, propios del trabajo matemático? Tenemos una alternativa: tratar de construir generalización y formalización, a partir del establecimiento de conexiones con las experiencias de los alumnos y de su capacidad de abstracción.

Como contribución a la reflexión didáctica sobre estos procesos voy a hacer referencia a ellos desde la óptica de los entornos computacionales, y más concretamente desde el trabajo en geometría dinámica con Cabri. Pretendo mostrar que el trabajo en entornos computacionales contribuye a construir un puente entre el significado atribuido a los procesos de generalización y formalización, desde el punto de vista cognitivo y el significado de estos procesos desde el punto de vista matemático, en aras de identificar lo que es hacer y aprender matemáticas, por lo menos en la matemática escolar.

Generalización

Como proceso cognitivo, podemos caracterizar la generalización como el acto mental mediante el cual *"abstraemos lo que es común y esencial a muchas cosas para formar un concepto que las comprenda a todas"* (diccionario de la real academia). Es decir, hacemos afirmaciones que abarcan a un conjunto de objetos, a partir del establecimiento de patrones de regularidad. Las experiencias inductivas de estudiar "varios" casos llevan al establecimiento de generalizaciones. Por ejemplo, después de observar la caída de muchos cuerpos, podemos afirmar que, en cercanías de la tierra, estos son atraídos por ésta.

Pero los procesos de generalización en matemáticas son diferentes. No por el hecho de sumar muchas veces la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, podemos afirmar que en todos los casos es de 180º. La generalización en matemáticas implica la introducción al lenguaje de cuantificadores: para todo... existe un .... Estos no se pueden introducir por la vía de la inducción empírica, sino por la vía de la definición o la demostración[2]. Se requiere del uso de un lenguaje que permita el tratamiento matemático de un representante de todos los posibles casos, **una variable**, con la cual se construyen y enlazan proposiciones matemáticas que llevan desde unos supuestos iniciales hasta la afirmación para todo..... o existe un ....que se desea demostrar. Pero, el comprender una demostración es uno de los aspectos más exigentes del trabajo en matemáticas que requiere de la aceptación personal del individuo para enfrentarse a este estilo de trabajo. Por eso, debemos preparar el terreno, aproximarnos a la idea de generalización matemática a partir de la actividad cognitiva de generalizar. Veamos cómo el trabajo con el computador puede ayudar.

Consideremos el siguiente problema: *Dibujar un triángulo ABC y construir las mediatrices de los lados AB y AC. Después, construir el punto P de intersección ¿Cuál es el lugar geométrico de P cuando A se mueve arbitrariamente alrededor del plano?* [3]

En papel, la situación toma lugar en el contexto de un ejemplo particular, el triángulo ABC, pues cuando se representan puntos ellos no son creados "en general", sino localizados en posiciones particulares del plano (figura 1).

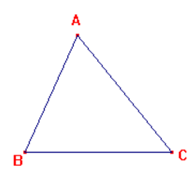


Figura 1

La búsqueda de soluciones al problema nos lleva a dibujar otros puntos A y encontrar otros P, para imaginarnos lo que sucede (figura 2) La exploración nos puede llevar a identificar un patrón general: los puntos P parecen colineales.

Al igual que en papel y lápiz, en Cabri la situación toma lugar en el contexto de un ejemplo particular, el triángulo ABC, pues cuando se representan puntos ellos no son creados "en general", sino localizados en posiciones particulares del plano. Sin embargo, en Cabri los objetos pueden moverse (mostrar en el computador) y al reconocer esta posibilidad, es difícil no pensar en ellos como representantes de un gran conjunto de posibilidades, asumiendo en este caso al punto A como una variable. De esta manera tenemos uno de los elementos esenciales para construir una generalización matemática, **la variable**, cuya conceptualización se favorece en virtud del medio de expresión de la matemática. Pensar

[2] Ejemplo para un conjunto finito de puntos y una propiedad P. Si comprobamos que para un elemento m del conjunto, la propiedad P se cumple, podemos decir : Existe un m tal que P se verifica para el. En el caso de Para todo, tendríamos que hacer la comprobación con todos los elementos del conjunto.

[3] Sugerido por Noss y Hoyles (1997)

acerca de una clase general sobre un caso simple es la meta de la búsqueda de la generalidad en matemáticas pero en ocasiones es difícil para los estudiantes. Con Cabri se les invita a pensar en general, mientras trabajan sobre lo particular.

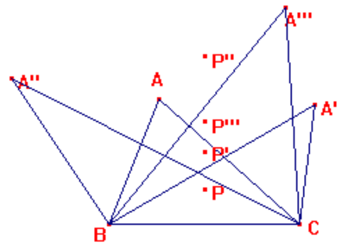


Figura 2

Al construir el “lugar geométrico” observamos, además de ver que los puntos son colineales, que éste es la mediatriz del lado restante (figura 3), ¿por qué? Porque las mediatrices son concurrentes, y como al mover A no se alteran las posiciones de B y C, toda la familia de triángulos tiene la misma mediatriz de BC, por lo que el locus del punto P será todas las posibles posiciones de los puntos de concurrencia de las mediatrices de los triángulos, que deben estar sobre la mediatriz de BC. Entonces comienza a tener sentido el introducir por ejemplo la afirmación: *“para todo A, con B y C fijos, el punto de corte de las mediatrices del triángulo ABC se encuentra sobre la mediatriz de BC”*

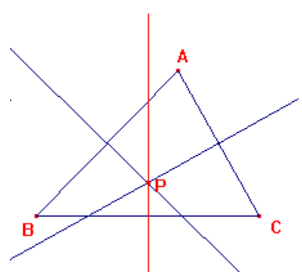


Figura 3

¿Qué podemos concluir de este ejemplo?

- Es claro que en papel y lápiz la idea de generalizar una propiedad geométrica, a partir de pocos ejemplos, es muy complicado. Algunos profesores tratamos de favorecer la búsqueda de generalidad solicitando a los alumnos escoger diversos casos y estudiar la propiedad en cada uno de ellos, pero este no suele ser un mecanismo muy eficaz para lograr que los alumnos vean los casos particulares como representación del caso general.
- Cabri favorece la compresión de este hecho pues lo que mejor hace el programa es la generación de un conjunto de casos, a partir de uno. Desde un punto de vista didáctico, ver que una propiedad se satisface en general invita a preguntarse el por qué pasa esto y a buscar darle sentido a la indagación de propiedades que se aplican en general.

- Pero podemos avanzar un poco más. Al introducir la idea de **variable** para trabajar en geometría, Cabri apunta a la búsqueda de ideas acerca de lo invariable de la variabilidad. En el problema anterior, la clave es reconocer que el movimiento del punto A no conlleva el movimiento de los puntos B y C, hecho que es difícil de imaginar en un dibujo hecho sobre papel. La acción de mover el punto A y observar los movimientos resultantes en la pantalla, es crucial para generar comprensión de la situación. El hecho de que veamos que el locus de P parezca ser la mediatriz de BC no significa que podamos afirmar que lo es. Por lo menos no en matemáticas. Esto nos conduce a preguntarnos lo que constituiría una prueba en el entorno Cabri. Por ejemplo, si trazamos la mediatriz y vemos que coincide con el locus ¿será una prueba suficiente? Si construimos varios triángulos y los puntos P correspondientes para luego medir las distancias a B y C y observar que la medida coincide, ¿será una mejor vía de prueba?

El arrastrar un vértice difícilmente constituye una demostración rigurosa. Sin embargo, esta experiencia puede ser explotada didácticamente para construir un puente hacia estrategias apropiadas en matemáticas, más que crear la barrera que la misma tarea parece producir en papel y lápiz.

Formalización

La formalización se refiere al acto mental mediante el cual *"damos forma a una cosa; revestimos algo de los requisitos legales; damos carácter de seriedad a lo que no tenía"* (diccionario de la real academia). En ese sentido, en la institución escolar asociamos la formalización en geometría con la introducción del lenguaje adecuado para hablar de conceptos o procesos o cuando formulamos definiciones a partir de la síntesis de propiedades relevantes de un objeto. Por ejemplo, decimos que hemos llegado a la formalización del concepto de paralelogramo cuando damos su definición: un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos congruentes.

Nuevamente debemos decir que la formalización en matemáticas es diferente. Formalizar en matemáticas consiste en atender a los aspectos sintácticos de la construcción de un lenguaje más que a los aspectos semánticos. En ese sentido no basta con decir las cosas "bien", sino en irlas articulando por el lugar que ocupan en un sistema. Por ejemplo, estamos atendiendo a los aspectos sintácticos de la construcción del sistema axiomático de la geometría euclidiana cuando valoramos una afirmación geométrica, como que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes, no por que tenemos muchas experiencias vitales con triángulos isósceles que nos permiten aceptar la afirmación o porque ésta nos proporcione información nueva, sino por el lugar que ocupa en una cadena deductiva. Esta tarea implica dar un salto cognitivo muy grande pues los objetos geométricos dejan de ser idealizaciones de representaciones de objetos concretos, para convertirse en objetos matemáticas propiamente dichos. ¿Cómo contribuye Cabri a acercarnos a la formalización matemática?

Veamos una actividad y dos procedimientos de construcción diferentes: *Dados tres puntos A, B, C, construir un paralelogramo que tenga los tres puntos como vértices.*

***Estrategia** 1: Se traza la recta AB, luego se traza una paralela a AB por C. Con la opción "compás" se construye un segmento congruente con el segmento AB, con uno de sus extremos en C. El cuarto vértice del paralelogramo es el extremo del otro segmento* (figura 4*).*

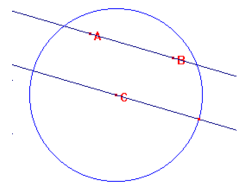


Figura 4

***Estrategia 2**: Se construye el punto medio de AC. Luego se halla el simétrico de B con respecto al punto medio.. El punto simétrico es el cuarto vértice del paralelogramo*(figura 5).

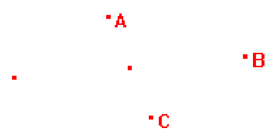


Figura 5

Ambos procedimientos contienen en sí mismos la estructura de un paralelogramo. La naturaleza del programa obliga forzosamente a una comunicación formal entre el estudiante y el computador, que demanda rigor en las instrucciones de construcción de la figura. Por eso la figura se constituye en el resultado de un acercamiento formal, en el efecto de este acercamiento. El procedimiento deja de ser un simple proceso mecánico de dibujo y se convierte en el medio para pensar "formalmente" acerca del objeto *paralelogramo*.

Así, las relaciones geométricas en juego modelan la representación visual y viceversa. Esta relación permite a los alumnos tomar conciencia de hechos importantes. Por ejemplo, muchos estudiantes piensan que un rectángulo no puede ser un paralelogramo pues un paralelogramo es un rectángulo *distorsionado*. Es probable que si la construcción del paralelogramo se hace en papel, los estudiantes no puedan conectar las relaciones geométricas que usaron en la construcción, con la definición formal de paralelogramo, para ver el rectángulo como un caso particular. Sólo cuando tienen la posibilidad de arrastrar algunos de los puntos iniciales A, B o C, en un ambiente dinámico, y relacionar las figuras obtenidas con los aspectos estructurales en juego, se dan cuenta que nada impide que la noción de paralelogramo subsuma el caso particular del rectángulo.

¿Qué podemos decir acerca de la formalización?

- La figura obtenida por medio de una construcción es la representación formal del paralelogramo pues explicita las relaciones estructurales presentes, más que las características perceptuales. Existe un proceso de formalización implícito en la interpretación del procedimiento usado que obliga a atender cada una de las relaciones geométricas en juego, y se constituye en fuente de indagación sobre las mismas. En la estrategia 1, se pone de presente el paralelismo y la congruencia dos a dos, de los lados del paralelogramo. En la estrategia 2, se pone de presente que las diagonales de un paralelogramo se bisecan. Al interactuar con el programa, los estudiantes atienden simultáneamente al resultado visual y a la relación geométrica que se está poniendo en juego. De esta manera se establecen y desarrollan enlaces entre el pensamiento formal e intuitivo, y el uso del *software* se constituye en un medio de formalizar lo formal o viceversa.

- Adicionalmente atiende a los aspectos simbólicos aportando en la vía de la formalización matemática. Al usar herramientas tradicionales este uso demanda un rigor que está altamente sintonizado con el propósito de establecer la validez, pues la formalización se alcanza en geometría con la demostración, pero se aleja mucho de la forma cotidiana de proceder.

Parece ser que la distancia entre lo que esperamos de los alumnos en geometría y lo que caracteriza el diario devenir es tan distinto que se constituye en un obstáculo para el aprendizaje. En el entorno computacional, la situación es muy diferente. En el paralelogramo hay una base racional (cognitiva) para interactuar con el mundo formal de las relaciones geométricas (los teoremas): la tarea de construir una forma particular. De esta manera es posible que generen lo que Vergnaud (1983) llama un teorema en acto. Por ejemplo:

> ***Teorema:*** *un cuadrilátero es un paralelogramo si resulta de aplicar la estrategia 1 (o la 2, u otra equivalente).*
> ***Corolario****: un rectángulo es un caso particular.*
> ***Demostración****: al arrastrar los objetos de la construcción se puede apreciar este hecho*

Abstracción

Hemos dicho que la didáctica tiene que hacer posible que los estudiantes accedan a altos niveles de complejidad, en donde los objetos matemáticos sólo se definan con base en las relaciones intra – matemáticas y por tanto adquieran el estatus de objetos matemáticos, pero sin descuidar la naturaleza situada del conocimiento.

Para contribuir a que los alumnos avancen hacia la generalidad y la formalización matemáticas, Moreno (2000) propone aprovechar su capacidad cognitiva de abstraer entendiéndola como la capacidad de reorganizar a un nivel cada vez más superior, aquello que ya se ha aprendido, hasta llegar a un nivel en el que la generalización y la formalización matemática tengan sentido.

Los conocimientos matemáticos iniciales dependen estrechamente del medio en donde son expresados. Si el medio dispone de recursos estructurantes, como en el caso de los entornos computacionales, se abre la posibilidad de establecer conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento y así ir produciendo versiones cada vez más organizadas, que si bien dependen del medio, comienzan a articularse en redes conceptuales cada vez más independientes. En estos escenarios, el estudiante puede coordinar sus ideas informales producto de sus experiencias vitales, con sus ideas formales producto de experiencias escolares previas para producir fragmentos cada vez más organizados de conocimiento.

El medio funciona como un soporte para el establecimiento de dichas conexiones. Favorece la generación de ideas que se expresan a través del medio, que están íntimamente vinculadas y articuladas a él. Poco a poco, la red conceptual se va separando de las conexiones con el medio y los objetos empiezan a verse en forma abstracta como objetos que son síntesis de múltiples determinaciones. Allí aparece la idea de **objeto matemático variable** y por eso, en ese momento tiene sentido introducir la actividad de generalizar, introduciendo cuantificadores, y la actividad de formalizar, expresando las relaciones estructurales presentes.

Veamos un ejemplo. Una vez los estudiantes han modelado geométricamente el Teorema de Pitágoras, mediante la comparación entre las áreas de los cuadrados construidos en cada uno de los lados, es posible que admitan que esta relación se verifica en **todos** los triángulos rectángulos al disponer de un medio como Cabri, que les permite tener la idea de generalidad abarcando muchos triángulos rectángulos (figura 6).

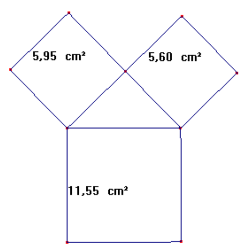


Figura 6

Sin embargo, ¿Cómo garantizar que esa relación sólo se verifica en triángulos rectángulos y no en otro tipo de triángulos? Nuevamente con Cabri, tenemos la oportunidad de explorar la situación con triángulos acutángulos u obtusángulos arrastrando el vértice correspondiente al ángulo recto de un triángulo que aparentemente era rectángulo (figura 7).

Al construir regiones rectangulares de área equivalente a la de los cuadrados construidos sobre los lados menores y encajarlos en el cuadrado construido sobre el lado mayor, los estudiantes pueden observar que las áreas no son equivalentes e intentar estudiar a qué corresponde el área sobrante o faltante[4] (figura 8). A partir del estudio de **las relaciones estructurales geométricas presentes**, en el medio, aparecen los argumentos necesarios para "ver" el Teorema del Pitágoras como un caso particular del Teorema del Coseno

[4] El profesor les puede sugerir que hagan las proyecciones ortogonales de los extremos del lado mayor del triángulo, sobre los lados menores para construir dos rectángulos de área igual al producto de los lados menores del triángulo por una constante (que resulta ser el coseno del ángulo comprendido entre ellos)

tendiendo a la ampliación de la reorganización del conocimiento. El significado de la expresión *2abcosC,* se da con relación al coseno del ángulo.

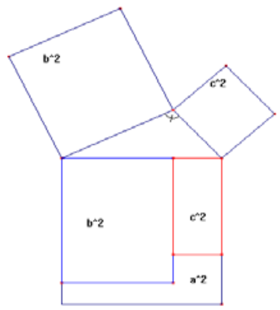


Figura 7

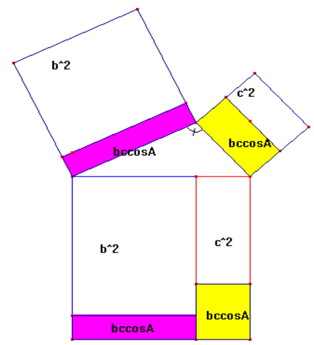


Figura 8

Conclusiones

Los medios computacionales estimulan la dialéctica entre el proceso de dar sentido a las prácticas cotidianas mediante la organización y la matematización, por una parte, y la comprensión de situaciones matemáticas mediante el recurso de darles sentido importándolo de una práctica extra – matemática. Permiten una convergencia entre actividades de exploración, que favorecen los procesos mentales de generalización y formalización y actividades de sistematización que llevan a la generalización y formalización matemáticas propiamente dichas.

Focalizar la atención en lo dicho anteriormente, construcción de generalización y formalización a partir de experiencias significativas que lleven a la abstracción, nos obliga a escuchar más a los estudiantes. Conlleva por tanto dos consecuencias:

(i) Nos invita a estudiar formas mediante las cuales los estudiantes se expresan matemáticamente. Debemos indagar por las vías en las cuales pueden hacer uso de su bagaje conceptual y por los escenarios en los que tales expresiones tienen lugar.

(ii) Nos obliga a pensar más cuidadosamente sobre lo que es la matemática misma, pues si esperamos ser capaces de reconocer hechos matemáticos, debemos tener clara la forma de hacerlo. Puede haber formas de expresión matemática que no conformen lo que consideramos el conocimiento matemático “oficial”, pero que es necesario e importante valorarlas en clase, como precursoras de futuros aprendizajes oficiales.

Bibliografía

NOSS R ; HOYLES C (1996) *Windows on mathematical meaning, learning cultures and computer.* En MORENO L; WALDEGG G (s.f.*) Fundamentación cognitiva del* *currículo de Matemáticas*. En RICO (ed) *Didáctica de las Matemáticas,* Capítulo 3 del libro, Editorial Síntesis, Madrid.

MORENO L (2002) *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

MORENO L (2002) *Nueva matemática Experimental*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

NOSS R ; HOYLES C (1996) *Windows on mathematical meaning, learning cultures and computer.* En MORENO L; WALDEGG G (s.f*.) Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas*. En RICO (ed) *Didáctica de las Matemáticas,* Capítulo 3 del libro, Editorial Síntesis, Madrid.

NOSS R; HOYLES C (1997). *Meaning mathematically with computers.* En Nunes y Bryant (eds) Learning and teaching mathematics. Psychology Press. UK.

VERGNAUD (1983). *Didactique et adquisition du concept de volumen.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 4, 1, pp. 9 - 25.

UN SOFTWARE ASISTENTE DE GEOMETRÍA Y LA VISUALIZACIÓN DINÁMICA DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

M. en C. Rafael A. Meza V.
CECyT Diódoro Antúnez E.-I.P.N., México
rmezav53@yahoo.com.mx
Visualización-Nivel Medio Superior

Resumen. Un acercamiento a través de una visualización dinámica al teorema fundamental del cálculo haciendo énfasis en la relación inversa entre áreas (acumulación) y tangentes (razón de cambio) contrasta con el acercamiento tradicional en el cual se presentan diversas figuras y gráficas estáticas para fundamentar y probar tan importante noción.

INTRODUCCIÓN La invención del cálculo es atribuible, en forma independiente, a Leibniz y Newton a finales del siglo XVII. Newton desarrolló los conceptos de *fluxión* y *fluente* motivado por el problema de calcular la velocidad de un cuerpo y Leibniz por su parte desarrolló los conceptos de *diferencial* e *integral* motivado en el problema de trazar tangentes a una curva cualquiera. También encontraron y probaron lo que ahora conocemos como “El Teorema Fundamental del Cálculo”. Su descubrimiento hizo posible el desarrollo algorítmico del cálculo y proporcionó una formulación genérica de la relación entre el problema de la tangente y el problema del área, o en nuestra moderna notación, entre derivación e integración. El problema de la tangente básicamente consistía en determinar un método que permitiera trazar una línea recta tangente a una curva en un punto específico; el problema del área, también fue abordado en forma geométrica, y básicamente consistía en encontrar un método que permitiera construir un rectángulo de área igual al área de interés.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

Parte I Si la función F está definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ para todo x en $[a, b]$, entonces F es una antiderivada de f en $[a, b]$.

Parte II Si F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN La motivación de este estudio surgió del planteamiento de la siguiente pregunta: El alumno que ha llevado un curso tradicional de Cálculo *¿es capaz de identificar, transformar o construir la relación que existe entre el problema de la tangente y el problema del área si únicamente dispone de información gráfica*? Aún cuando a primera vista este problema parece simple hemos constatado que *no es obvio*.

MARCO TEÓRICO Este trabajo tiene por finalidad presentar un análisis epistemológico del Teorema Fundamental en un ambiente computarizado; ocupándonos ante todo del proceso mismo de su construcción, de la génesis de las sucesivas estructuraciones y de los mecanismos de pasaje de una etapa a otra en su desarrollo histórico.

CUESTIONARIO   Con objeto proporcionar respuestas viables a la pregunta de investigación, aplicamos un cuestionario para explorar el tipo de comprensión que tiene el alumno acerca de la relación entre tangentes y áreas. El cuestionario no tiene, como es común, expresiones algebraicas en forma explícita, presenta sólo elementos gráficos en el plano numérico.

ALUMNOS Las muestras para el cuestionario fueron tomadas del último semestre del nivel medio superior (de 16 a 18 años) y del primer año de licenciatura.

CUESTIONARIO SOBRE LA RELACIÓN ENTRE TANGENTES Y ÁREAS

*Sea **L** la recta tangente a la gráfica de la función polinomial de segundo grado **f** en el punto de coordenadas **(2, 60)** como se muestra en la figura 1.*

*a) Encuentra el valor de la función **f** en **x = 2**, es decir **f (2).***

*b) Encuentra el valor de la derivada de la función **f** en **x = 2**, es decir **f ´(2).***

*c) En el sistema de coordenadas proporcionado en la figura 2 traza la gráfica de la función derivada **f ´(x).***

*d) Determina la expresión polinomial de primer grado que corresponde a **f ´(x).***

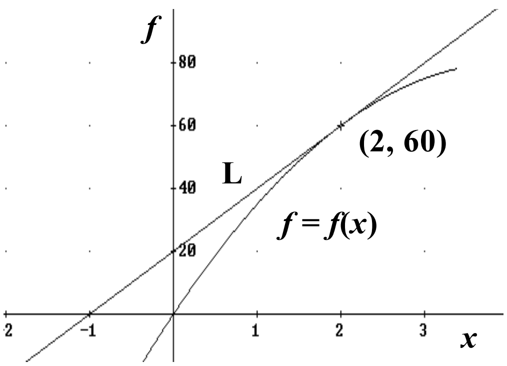


figura 1

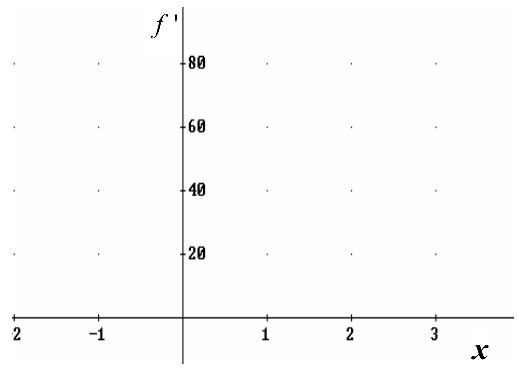


figura 2

RESULTADOS SOBRE CUESTIONARIO   Hemos podido constatar que ni alumnos del último año del nivel bachillerato ni del primer año de licenciatura del área Físico-Matemáticas logran identificar, transformar o construir la relación entre tangentes y áreas.

EL TEOREMA DE BARROW   Las investigaciones de personajes como: Oresme, Galileo, Roberval, Descartes, Torricelli, Fermat, entre otros, condujeron a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad como función del tiempo. Estos resultados fueron dando lugar al reconocimiento de lo fundamental de la relación entre tangentes y áreas, pero fue Isaac Barrow quien con mayor precisión la formuló en 1667. Struik en su libro *"A Source Book in Mathematics"* en las páginas 254-260 proporciona los resultados más representativos de la *Lecture X* de las *Lectiones geometricae* de Barrow. Reescribo el *párrafo XI* que corresponde al Teorema fundamental para su discusión.

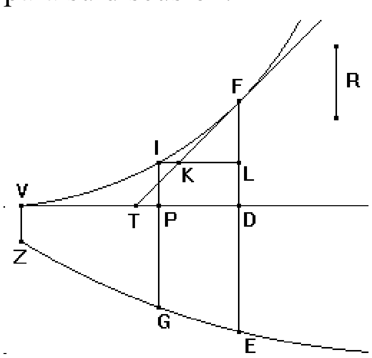


figura 3

Con referencia a la figura 3, sea *ZGE* una curva cuyo eje es *VD*, consideremos las ordenadas *VZ, PG* y *DE* perpendiculares al eje y creciendo en forma continua desde la ordenada inicial *VZ*. Construyamos la curva *VIF* con las siguientes hipótesis:

1. El segmento *R* es de magnitud unitaria.
2. El rectángulo determinado por los segmentos *DF* y *R* es igual en área a la región *VDEZ*.

3. Sea T un punto sobre la recta VD tal que satisface $\frac{DF}{DE} = DT$.

En consecuencia $LF = DF - DL = \text{área } VDEZ - \text{área } VPGZ = \text{área } PDEG$. Por otro lado, ΔLKF es semejante al ΔDTF así; $\frac{LK}{DT} = \frac{LF}{DF}$, y por lo tanto $LK = LF\,\frac{DT}{DF}$. Ahora $\frac{1}{DE} = \frac{DT}{DF}$, de la tercera hipótesis y $LK = \frac{LF}{DE} = \frac{\text{área } PDEG}{DE} < \frac{DE \cdot DP}{DE} = DP = LI.$

Así tenemos que: $LK < LI$. Si el punto P está a la derecha del punto D se cumple entonces la relación: $LK > LI$. Con lo que se demuestra que la recta TF es tangente a la curva VIF en el punto F en el sentido clásico griego de la recta que toca en un único punto a la curva sin cortarla.

EL CALCULUS Desde luego que es posible reinterpretar en nuestra notación este resultado. Dada una función creciente $y = f(x)$, figura 4, construyamos una función $Y = F(x)$, figura 5, con la condición de que la ordenada $Y = DF$ represente el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las ordenadas VZ, DE y el eje horizontal, es decir $Y = \int_0^x y\,dx$. Barrow elige el punto T sobre el eje horizontal de tal forma que se cumpla la relación $\frac{DF}{DE} = DT$, y demuestra que la recta TF es tangente a $Y = F(x)$. Por otro lado se tiene que $\frac{DF}{DT} = DE = y$, en nuestra notación este resultado es equivalente a $\frac{dY}{dx} = y$, es decir $\frac{d}{dx}\int_0^x y\,dx = y$. Barrow da así solución al problema de construir una curva $Y = F(x)$, en la que en todo momento conocemos su tangente. En nuestra notación moderna, la integral definida considerada como una función de extremo superior variable resuelve el problema de encontrar una función en la que en cada momento conocemos su derivada. Lo que no está presente aquí es el cálculo de áreas por medio de tangentes o en nuestra notación la obtención de integrales definidas a partir de integrales indefinidas, sin embargo podemos considerar a la luz de estos hechos que en 1667 logró identificar lo que hemos llamado parte I del Teorema fundamental del Cálculo. Desde luego es posible reescribir este resultado en forma tal que nos presente una nueva relación entre las funciones F y f (parte II).

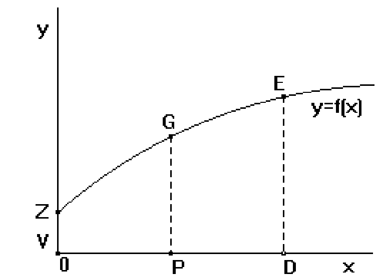


figura 4

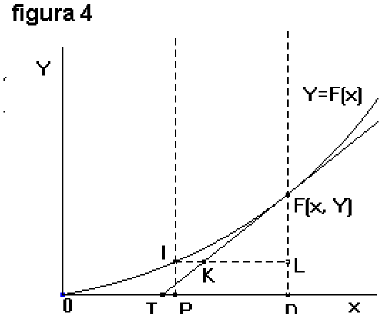


figura 5

CABRI Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Con base en el marco teórico propuesto y con ayuda de un software de geometría dinámica es posible llevar a cabo una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo que enfatice la relación entre áreas y tangentes. No es la pretensión de esta sección realizar una descripción detallada de los comandos del software, por el contrario, parto del supuesto de que existe un conocimiento básico de ellos y pretendo utilizarlos como herramientas cognoscitivas.

PARTE I DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Inicio esta presentación mostrando en Cabri el Teorema de Barrow para el caso en el cual la acumulación de área corresponde a un rectángulo de altura constante y base variable. El primer paso consiste en construir un rectángulo *WXSR*, como el que se muestra en la figura 6, con las características de que el vértice *R* esté situado sobre el segmento *WQ* y el vértice *X* sobre el segmento *WV*. De esta forma es posible tener una animación controlada tanto del vértice *R* como del *X*. Para el caso particular de la figura 6 la altura *WR* del rectángulo es igual a 0.76 cm. y la base *WX* es igual a 4.14 cm. En este caso y en los subsecuentes todas las medidas de segmentos están en centímetros y en consecuencia las áreas de regiones correspondientes en centímetros cuadrados. El área, entonces, del rectángulo en cuestión es $3.16\ cm^2$, tracemos ahora, figura 7, a partir del punto *X* la ordenada *PX* perpendicular al segmento *WV* de magnitud igual a la magnitud del área, para ello tracemos una perpendicular por *X*, y sobre ella una semirrecta de punto inicial *X* que quede por arriba del segmento *WV*, finalmente realicemos la transferencia del área sobre la semirrecta, obteniéndose así el punto *P* que determina el segmento *PX* con la "propiedad" de que su magnitud es igual a la magnitud de área de la región *WXSR*. Es de suma importancia tener presente en este momento que esto es posible debido a que el área del rectángulo determinado por los segmentos *PX* y *CD* (el segundo será considerado a lo largo del presente trabajo de magnitud unitaria) es igual en área a la región *WXSR*. Es posible ahora dar animación al punto *X*, al *R* o ambos y analizar las diversas trayectorias que describe el punto *P*. Empecemos por desplazar al punto *X* con el puntero y observar que con éste se desplaza el segmento *PX* en forma perpendicular al segmento WV y que su magnitud es siempre igual al área de la región *WXSR*.

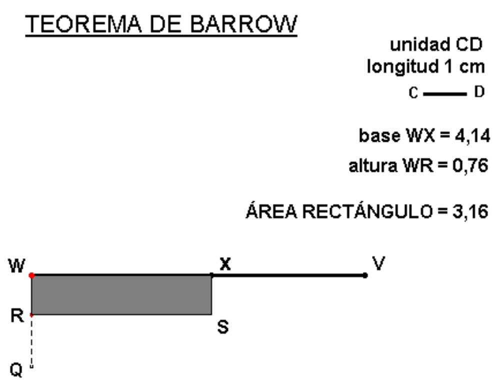


figura 6

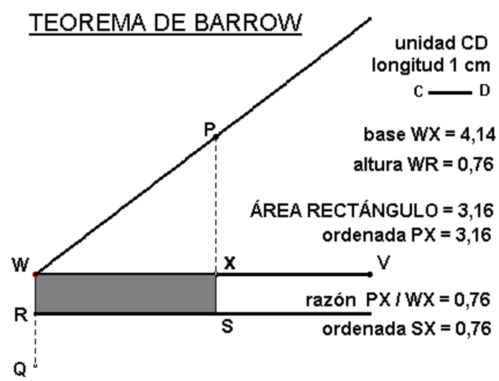


figura 7

Surgen ahora de forma natural varias preguntas. Si damos "animación" a *X* ¿qué tipo de curva describe la trayectoria del punto *P*? ¿Por qué describe tal trayectoria? Podemos en este momento activar en el punto *P* la opción "traza" y es ilustrativo ver como la línea *WP* va apareciendo en la pantalla electrónica a medida que el punto *X* se desplaza sobre el segmento *WV*. A continuación podemos desactivar la traza y tomar la opción "lugar geométrico" del punto P debido al desplazamiento del punto *X* y obtenemos nuevamente la línea *WP*, pero en esta ocasión la línea se construirá por completo y será un objeto definido. Como tal, pueden seleccionarse puntos del mismo. Además, si se modifica un objeto que define un lugar geométrico, éste se recalculará y aparecerá en forma "continua" para mostrar el efecto de la modificación. Podemos ahora crear el segmento RS, proporcionar animación al punto *X* y observar que el desplazamiento del punto S se lleva a cabo sobre dicho segmento. Así, mientras el punto *P* se desplaza sobre el segmento *WP* el punto *S* lo hace sobre *RS*, pero además ambos también se desplazan sobre la perpendicular por *X*. No es sencillo "visualizar" en un dibujo estático estos desplazamientos: un software puede ser muestro mejor aliado.

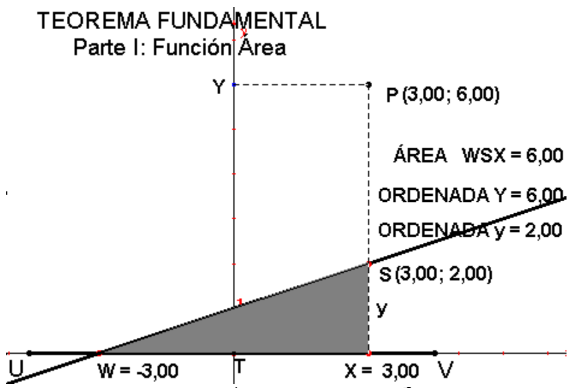
Si ahora *X* permanece fijo y damos animación al punto *R* veremos el desplazamiento del segmento *RS* en forma continua y paralela al segmento *WV* lo cual provoca un cambio en forma continua del ángulo *PWX* y además se observa que la "razón" $\frac{PX}{WX}$ es igual a la magnitud del segmento *SX*: la altura del rectángulo. Es esta la segunda propiedad de nuestra construcción.

Resumiendo, con la "acumulación" del área de un rectángulo de altura constante y base variable construimos una curva de la cual en todo momento conocemos la razón a la que se está llevando a cabo dicha acumulación, la cual está dada por el valor constante de la altura del rectángulo.

Finalizamos esta sección con las siguientes dos preguntas: ¿Si la región *WXSR* es un cuadrado qué tipo curva o trayectoria describe *P*? y ¿Qué curva describe si la región de interés es el triángulo rectángulo *WXS*?

Hemos con la ayuda del Teorema de Barrow y el software Cabri "visualizado" dos propiedades de la figura en términos de relaciones internas (etapa intrafigural) y preparado el camino para abordar el Teorema Fundamental del Cálculo en su siguiente etapa (interfigural) la de considerar dichas propiedades como invariantes de un conjunto de transformaciones posibles. El terreno para establecer la relación entre acumulación (área) y razón (tangente) como invariante de transformaciones esta preparado.

La siguiente etapa la desarrollaré para una región ligeramente diferente y desde luego más interesante. En el sistema de coordenadas rectangulares, construyamos la figura 8 con las siguientes propiedades: a) Tracemos un segmento *UV* de extremos *u* y *v* sobre el eje horizontal y coloquemos los puntos $W(w, 0)$ y $X(x, 0)$ sobre él, con la finalidad de que al dar animación a dichos puntos estos sólo se desplacen sobre el segmento, esto nos permite tener control sobre los desplazamientos de dichos puntos, y visualizar una determinada región del plano en forma sistemática para su análisis. b) Con la herramienta "Recta" podemos crear la recta *f* (no importa el signo de la pendiente) que pase por *W* y con la herramienta "Perpendicular" una perpendicular por *X* que corte a la recta *f* en *S*, formamos así el triángulo rectángulo *WSX*. Si mantenemos al vértice *W* fijo y damos animación al vértice *X*, ¿qué variables que dependen de *x* están presentes en dicha animación del triángulo? c) Podemos ahora con la ayuda de la calculadora del software calcular la acumulación de área del triángulo rectángulo *WSX* utilizando las coordenadas de los vértices, y transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar el punto $Y(0, Y1)$, trazando a continuación una perpendicular por él que corta a la perpendicular por *X* en el punto *P*.



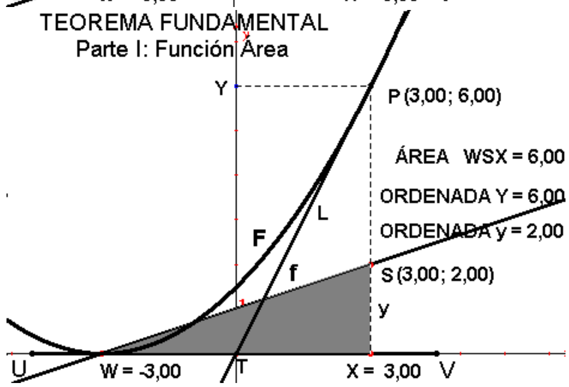


figura 8 figura 9

Surgen ahora un par de preguntas interesantes, si damos animación a *X*, ¿qué tipo de curva describe el desplazamiento del punto *P*? ¿Por qué? Ante la clase podemos "desplazar ligeramente" *X* con el puntero y pedir a los alumnos que describan la curva de la trayectoria seguida por *P*. No es ésta una habilidad sencilla, por el contrario, es difícil tanto para profesores como para alumnos en general visualizar la trayectoria de *P*. Si activamos ahora la traza para *P* y damos animación a *X* surgirá la curva correspondiente. La figura 9 muestra la curva descrita por *P* como "lugar geométrico". Es conveniente en este momento "crear" la parábola correspondiente al lugar geométrico descrito por *P* con el comando "Cónica". En lo sucesivo hablaré de estas curvas, y otras más, en el sentido aquí descrito.

Desde luego que bien podemos llamar a la curva descrita por el punto P "Función Área" o "Función Acumulación". He constatado que en general los alumnos del último año de bachillerato y primer año de licenciatura del área de ingeniería y físico-matemáticas no han comprendido que con la acumulación de área de una determinada región es posible construir una función y mucho menos que con la razón de cambio otra. A la curva que describe el punto *P* le llamaremos $Y = F(x)$, e $y = f(x)$ a la que describe *S*. Se puede observar que hasta el momento no han aparecido expresiones algebraicas, lo cual puede ser una ventaja para aquellos que no tienen las herramientas formales necesarias para el tipo de desarrollo que se da en un curso tradicional. Sin embargo, ha llegado el momento de introducirlas. ¿Cuál es la expresión algebraica de la curva que describe el punto *P*? Es este un significativo ejercicio el cual nos permite hallar la "función integral" *F* de una función *f* con herramientas algebraicas. Dado que la curva *F* se obtiene de graficar la acumulación de área del triángulo *WSX*, bastará con determinar la expresión algebraica de dicha área como función de *x*. Pero ¿cuál es la base del triángulo? Otro aspecto interesante de esta forma de acercamiento al Teorema Fundamental es la significación que van adquiriendo los diversos elementos presentes en las gráficas utilizadas y que estos están, en general, al alcance de los alumnos. Bien, para el caso que estamos trabajando: *W* fijo y *X* variable. Tenemos que la base es $X - W = x + 3$ y la altura $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$. ¿Por qué? Así, el área como una función de la variable *x* está dada por $A(x) = \frac{1}{2}(x+3)(\frac{1}{3}x+1) = \dfrac{x^2}{6} + x + \dfrac{3}{2}$, por tanto la expresión algebraica de *F* como función de la variable *x* está dada por $F(x) = \dfrac{x^2}{6} + x + \dfrac{3}{2}$. Esta expresión tiene la propiedad $F'(x) = f(x)$, es decir que la función *F* es una antiderivada de *f*. Así, si la función *F* representa la acumulación de área de la región triangular *WSX*, *f* representa la razón a la que se esta llevando dicha acumulación, para cualquier valor *x* del intervalo (u, v). En particular para $x = 3$, la acumulación alcanzada es $F(x) = 6\ cm^2$ y la razón a la cual tiene lugar dicha acumulación es $f(3) = 2\ \dfrac{cm^2}{cm}$.

Tenemos, entonces, que la ordenada del punto $S(x, f(x))$ es igual a la razón a la que está cambiando la acumulación en el punto *P*, es decir que la pendiente de la recta tangente *L*, en este punto, está dada por $m = f(x)$. Así, de la tangente *L*, conocemos un punto *P* y su pendiente, y sólo resta calcular el valor de la ordenada en el origen, transferir dicho valor sobre el eje de las ordenadas para determinar el punto $B(0, b)$ y crear la recta tangente *L* a la función *F* en el punto *P*.

Otra alternativa para trazar la recta *L* es utilizar el Teorema de Barrow el cual establece que el punto *T* se encuentra ubicado a $\dfrac{PX}{SX} = t$ unidades de distancia del punto *X* sobre el segmento *XW*, figura 9, así con la ayuda de este punto podemos trazar la recta tangente *L* a la curva *F* en el punto *P*, y de la cual desde luego podemos conocer su pendiente. Al dar animación al punto *X* la recta tangente "envolverá" a la gráfica de la parábola *F*.

Es posible analizar aspectos cualitativos entre los comportamientos de las curvas *F* y *f* con este tipo de acercamiento. Por ejemplo, Si la función *f* tiene pendiente negativa la parábola abre hacia arriba, pero si con el puntero "arrastramos" la recta *f* modificando poco a poco su pendiente hasta que tome valores negativos observaremos como la concavidad de la parábola se va modificando hasta que ésta abre hacia abajo. Otro aspecto de interés es que el vértice de la parábola coincide con el vértice *W* del triángulo *WSX*. ¿Por qué? ¿Qué comportamiento manifestará la parábola si damos animación al vértice *W*?

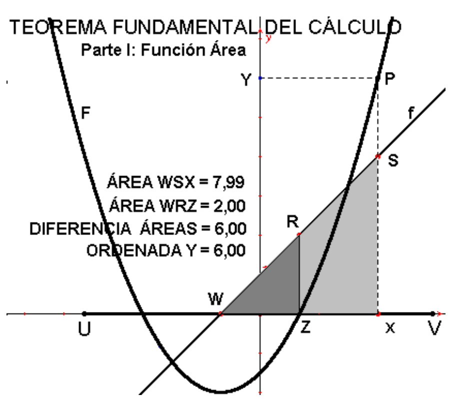


figura 10

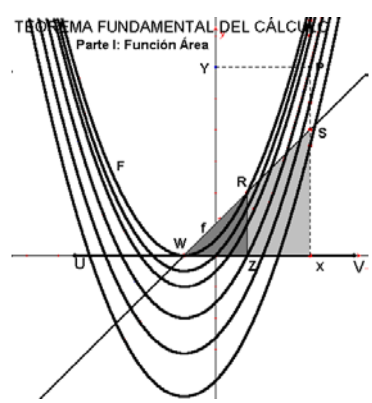


figura 11

Para terminar con está sección correspondiente a la primera parte del Teorema Fundamental presento en la figura 10 otra situación de interés. El procedimiento para obtener la situación mostrada es similar a la anterior, pero en esta ocasión colocamos, además de los puntos *W* y *X*, el punto *Z* sobre el segmento de extremos *u* y *v*. Por *Z* trazamos una perpendicular que corte a la función *f* en *R* con lo que obtenemos los triángulos semejantes *WSX* y *WRZ*, determinamos las correspondientes áreas y determinamos la ordenada $Y1$ como la diferencia de estas áreas, es decir $Y1 = área\ \Delta WSX - área\ \Delta WRZ$. Después de transferir este valor sobre el eje de las ordenadas para construir el punto $Y(0, Y1)$, trazamos por este último una perpendicular que corte a la perpendicular que pasa por *X* en el punto *P*. La curva que describe este último corresponde a la parábola *F*. Con toda seguridad, si realizó los ejercicios anteriores ya podrá decir cuál es el comportamiento de la curva *F* cuando desplazamos *X*, *W* o modificamos la pendiente de la recta *f*, pero si damos animación al punto *Z* obtenemos la familia de antiderivadas de la función F, figura 11. Hasta aquí el primer teorema fundamental del cálculo.

PARTE II DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO   Empezaremos por construir una parábola cualesquiera, figura 12, para ello tracemos como ya es costumbre el segmento de extremos *u* y *v* sobre el eje de las abscisas y sobre él tracemos el punto $X(x, 0)$, desde luego que esto es con la intención de tener control sobre la animación que se puede dar a dicho punto. Tracemos ahora el foco *C* de la parábola en cualquier parte del plano, por ejemplo en la figura 12 está localizado en el segundo cuadrante y el punto *D*, por el cual ha de pasar la directriz, sobre el eje de las ordenadas. De la intercepción de la perpendicular por *C* al eje de las abscisas obtenemos el punto *W*. De la perpendicular al eje de las ordenadas por *D* y la perpendicular al eje de las abscisas por *X* obtenemos el punto *N*. Trazamos a continuación el segmento *CN* y la mediatriz de este último, la cual cortará a la perpendicular por *X* en *P*. La curva que describe el punto *P* al desplazarse *X* será la parábola *F* mostrada en la figura y la mediatriz será la recta tangente *L* a la parábola en el punto *P*, que el dar animación al punto *X* envolverá a la parábola *F*.

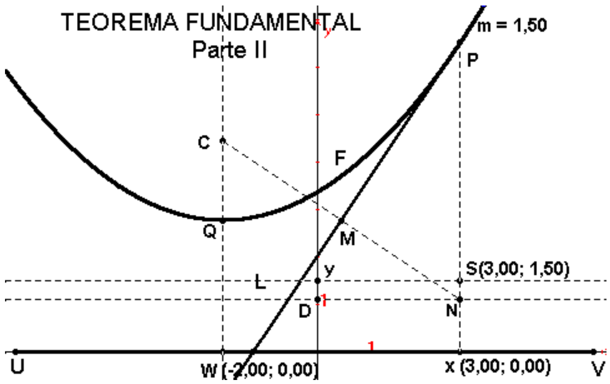


figura 12

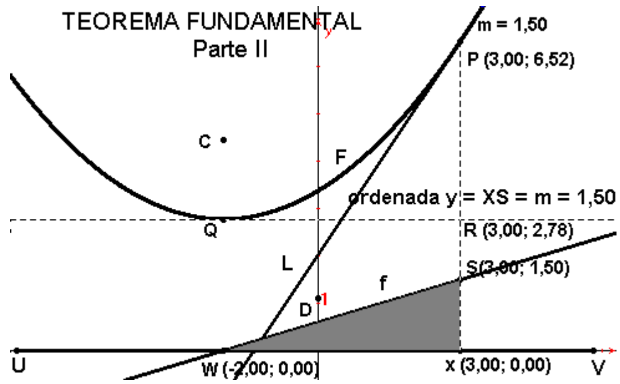


figura 13

Con la herramienta "Ecuación y Coordenadas" del software podemos determinar la ecuación de la función F y con la herramienta "pendiente" la pendiente de la recta L (en la figura 12, $m = 1.50$), transferimos ahora este valor sobre el eje de las ordenadas y por él trazamos una perpendicular que corte a la perpendicular por *X* en el punto $S(x, m)$, así la ordenada de este punto será $y = m$. Podemos ahora crear la recta *f* que pasa por los puntos *W* y *S*, a la cual podemos llamar "función tangente", figura 13, de tal forma que al dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre ella y la transformación que sufre el triángulo *WSX* provocará una acumulación de área, es decir, la función *f* es "acumulativa" y el área acumulada para cualquier valor de *x* está dada por $F(x)$, salvo una "constante". ¿Cuál es el valor de esa constante? Si el vértice *Q* de la parábola coincide con el vértice *W* del triángulo *WSX*, $F(x)$ proporcionará el valor correcto del área acumulada. Es posible modificar la concavidad y la ubicación de la parábola arrastrando el foco *C* o el punto *D* por el que pasa la directriz.

Abordemos ahora una última situación de interés, en la construcción correspondiente a la figura 13 construyamos sobre el segmento de extremos *u* y *v* un punto $Z(z, 0)$ entre los punto *W* y *X*, figura 14. Tracemos la recta tangente *L1* a la función *F* en el punto $P1(z, Y1)$ correspondiente a la abscisa *z* y la recta tangente *L2* en el punto $P2(x, Y2)$ correspondiente a la abscisa *x* como se llevó a cabo en el ejemplo anterior. Calculemos la correspondiente pendiente $m1 = y1$ de la tangente *L1* y $m2 = y2$ de la tangente *L2* y transferimos ahora estos valores sobre el eje de las ordenadas y por $y1$ trazamos la perpendicular que corte a la perpendicular por *Z* en el punto $R(z, y1)$ y por $y2$ la perpendicular que corte a la perpendicular por *X* en $S(x, y2)$, podemos ahora crear la recta *f* que pase por los puntos *R* y *S*, la cual interceptará al eje de las abscisas en el punto *W*, formándose los triángulos rectángulos semejantes *WSX* y *WRZ*. Al dar animación al punto *X*, el punto *S* se desplazará sobre la gráfica de la función *f*, la cual es acumulativa, trasformando al triángulo *WSX* lo que se reflejará en la acumulación dada por $\text{área } WSX - \text{área } WRZ$ y cuyo valor puede ser calculado directamente por la diferencia $F(x) - F(w)$. En otras palabras, $\int_z^x f = F(x) - F(z)$.

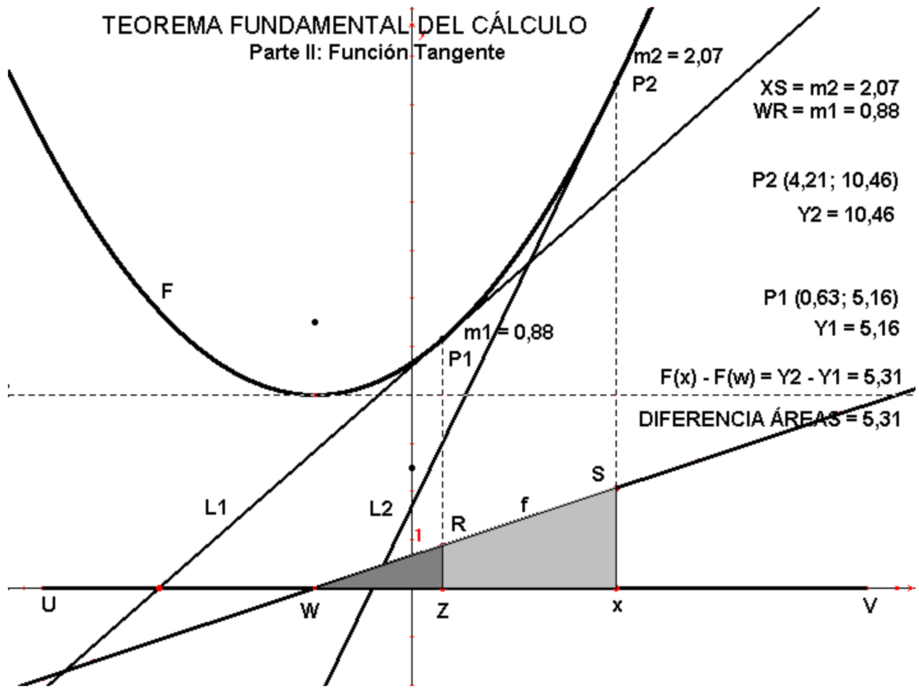


figura 14

OBSERVACIONES La historia y un ambiente computarizado nos permitieron una visualización dinámica del Teorema Fundamental del Cálculo, con énfasis en la relación entre áreas y tangentes, que pone en evidencia los mecanismos generales de su desarrollo: primero como propiedades internas de una figura, más tarde como invariantes de transformaciones posibles y finalmente como variaciones intrínsecas de una estructura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. (1968). *"A History of Mathematics"*. John Wiley & Sons. New York, USA.

Struik, D. J. (1969). *"A Source Book in Mathematics, 1200-1800"*. Harvard University Press. Cambrige.

Modelado geométrico en el espacio bi y tridimensional de un Dodecaedro en Cabri Géometre

Sonia Ivonne Cubillos Vanegas
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Jorge Tadeo Lozano. Bogotá, Colombia

Educar al estudiante en cuanto al desarrollo de su capacidad de comprensión espacial al interior del espacio bi y tridimensional construido en Cabri II, permite generar procesos de reflexión en cuanto a las relaciones existentes entre los objetos geométricos y el espacio de referencia donde éstos se representan; así como la depuración de los conceptos de estructura, tensión y movimiento de las formas geométricas, los mismos conceptos necesarios para generar procesos de creación (composición) planteados por Marcolli.

> "La auténtica composición es aquella que se basa en la estructura sin desnaturalizar su verdad y coherencia formales"[1]

INTRODUCCIÓN:

En el presente trabajo se explica el proceso mediante el cual se puede reflejar las características esenciales de un sólido, desde la mirada de la Geometría descriptiva; utilizando como plataforma digital el software Cabri Géométre II.

Se presentarán ejemplos del uso de Cabri Géométre II, en perspectiva cónica, teselaciones, e intersección de sólidos.

En la universidad FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DE BOGOTA JORGE TADEO LOZANO, con sede en Bogotá (Colombia) se dicta los programas de GEOMETRÍA DESCRIPTIVA I y II para estudiantes de Bellas Artes, Arquitectura, Diseño Industrial, Diseño gráfico, y Diseño de multimedia.

El servicio docente lo administra y presta el Departamento de Ciencias Básicas; desde allí como docente de tiempo completo dicto Geometría Descriptiva I y Geometría Descriptiva II. El objetivo planteado en las asignaturas es la generación de estructuras de pensamiento geométrico, mediante desarrollo de la inteligencia espacial, tan necesaria en estudiantes de los mencionados perfiles educativos.

La concepción del programa de las dos asignaturas está diseñado de tal forma que se le da prioridad a las actividades académicas donde se generen procesos de análisis, desarrollo de la percepción, abstracción, interpretación y reconocimiento de patrones.

Entre los tipos de actividades desarrollados con los estudiantes se utiliza Cabri Géométre II, como plataforma digital para la resolución de problemas, los cuales están ordenados en complejidad creciente desde las construcciones geométricas básicas con los conceptos cuando se trabaja con la regla y el compás, hasta el desarrollo de complejos sistemas de representación

[1] Marcolli Atilio. Curso de Educación Visual. Madrid 1978.Pág. 17.

propios de la Geometría Descriptiva de Gaspar Monge; así como problemas de la Geometría Proyectiva.

La dinámica de la exposición “MODELADO GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO BI Y TRIDIMENSIONAL DE UN DODECAEDRO EN CABRI GÉOMETRÈ” estará destinada a mostrar la utilización de Cabri Géométre II, para el desarrollo de proyecciones ortogonales en vista horizontal y vertical (representación bidimensional), así como su representación isométrica (representación tridimensional), con su respectiva animación.

El uso de Cabri Géométre II, permite visualizar superficies de intersección de dos sólidos; representaciones bi y tridimensionales de objetos en perspectiva cónica con uno, dos y tres puntos de fuga.

Las modelizaciones de perspectiva con Cabri permiten explorar los sucesos de variación de los objetos respecto al espacio, cuando el observador se acerca, se aleja o cuando cambia la posición respecto a la altura, permitiendo explorar las posibilidades de la perspectiva aérea.

La exploración dinámica de las variables que influyen en las representaciones tridimensionales elaboradas en Cabri permiten al estudiante alcanzar excelentes niveles de comprensión espacial; si se presentan equivocaciones en la concepción volumétrica, en la proporcionalidad o en la estructura geométrica del sólido construido; Cabri las detecta cuando se somete la figura a giros. Por lo cual Cabri se constituye en un excelente mediador para los procesos de abstracción y compresión espacial involucrados en la enseñanza aprendizaje de la Geometría.

ANTECEDENTES

> “Se cree que las computadoras son tecnologías pero el lápiz, el papel, el bolígrafo, los libros, el signo =, el pizarrón, el alfabeto, no lo son...Pero en realidad sí lo son: Son tecnologías inventadas por el ser humano para servir de amplificadores y re-organizadores a su cognición. Si adoptamos este punto de vista entonces la computadora pierde ese aire de instrumento extraño con el cual la vemos y pasa a formar parte de un proceso natural de desarrollo sociocultural”[2]

La naturaleza de la Geometría Descriptiva es la de generar procesos que favorecen el desarrollo de la comprensión espacial. La temática incluye la aplicación de reglas, que no siempre garantizan la comprensión, en muchos casos se aplican en forma mecánica desfavoreciendo notoriamente la adquisición de habilidades espaciales.

La aplicación indiscriminada de reglas ocasiona en muchos casos incoherencias en el proceso de aprendizaje, porque aunque un estudiante puede llegar a la solución del problema, no se puede afirmar que el problema fue comprendido, sin embargo la aplicación de reglas en forma mecánica al interior de Cabri no es posible, porque al imprimir el giro a los objetos tridimensionales, se debe visualizar su volumetría, lo cual es imposible construir si el objeto no se ha entendido a cabalidad.

---

[2] Moreno Armella Luis. CNVESTAV-IPN, México Evolución y tecnología. Memorias del seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el Aula de matemáticas. Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media Colombiana. Editor Ministerio de Educación Nacional. Enero del 2002. Bogotá. Colombia.

Cabri permite crear ambientes virtuales, como medio donde el estudiante experimenta, a través de la construcción de formas tridimensionales, observables simultáneamente en múltiples visualizaciones desde diversos ángulos, en este ámbito el alumno percibe directamente el uso de las proyecciones estudiadas en Geometría Descriptiva; potenciando sus posibilidades de comprensión espacial.

En algunos casos los estudiantes comprenden los procesos de abstracción pero se le dificulta manifestar las respuestas manuales, Cabri permite resolver problemas geométrico-espaciales, independientemente del desarrollo de habilidades de motricidad fina.

Para resolver un problema en Cabri se requiere analizar procedimientos para experimentar con la forma (descubrir sus relaciones de proporcionalidad así como la estructura entre componentes) e incluso movilizarse en su interior. El espacio virtual ofrecido por el computador, permite en cierta forma trabajar como en un taller, con herramientas, construyendo formas, las cuales. Cuando a los elementos geométricos se les imprimen movimiento en Cabri, este permite la comprensión de lo que sucede cuando una figura cambia de posición con respecto a otra, como en el caso de las intersecciones entre objetos geométricos.

Cabri se convierte en una poderosa herramienta para evaluar los procesos de construcción geométrica, debido a que si un objeto no cumple con sus relaciones de paralelismo, proporción, perpendicularidad entre otras; en el proceso de comprobación, al rotar el objeto, este se deforma, esto manifiesta que hay errores en los procesos de concepción y desarrollo.

Para lo anterior se debe entender la estructura subyacente, ejes, simetrías, rotaciones y demás relaciones geométricas; de lo contrario el objeto se deformará; esto permite desarrollar una serie de procesos relacionados con habilidades intelectuales, además de comprender las dimensiones de dicho espacio.

PRINCIPIOS DE MODELADO GEOMÉTRICO

> "En otras palabras, decimos que el campo sin objeto, aparte de su específica estructura, no asume aún un valor espacial; sin embargo, sigue siendo un espacio, pero un espacio vacío. Pero apenas introducimos en él un objeto, el campo asume inmediatamente un valor de espacio." [3]

Los principios del modelado bi y tridimensional se estudian en la geometría descriptiva, se entiende por modelado geométrico el proceso mediante el cual se crean gráficas por computador; lo cual permite analizar y visualizar diseños, o elementos reales o imaginarios.
os modelos creados por computadora manifiestan una gran habilidad de comunicar información geométrica visual, así como manifestar las propiedades cualitativas y cuantitativas de los objetos.
En un proceso de Modelado Geométrico convergen, múltiples áreas del conocimiento, como son: La visualización (entendida esta como proceso de comprensión de la información gráfica visualizada); La imaginación (como proceso de producción, reproducción y análisis de objetos reales ideados y /o virtuales); La Geometría Sólida (estudio de los objetos tridimensionales), la

[3] Marcolli Atilio. Curso de Educación Visual. Madrid 1978.Pág. 27.

Geometría Analítica (analiza las propiedades generales y las estructuras de los objetos geométricos, basadas en operaciones algebraicas y coordenadas de posición), La Geometría plana (estudio de las figuras en dos dimensiones).

La Geometría Descriptiva es la rama de la matemática que estudia las propiedades de las formas bajo un sistema de representación estandarizada universalmente y permite relacionar, puntos, líneas, planos y sólidos; así como determinar sus medidas y posición en el espacio cartesiano.

La Geometría Descriptiva fue desarrollada por Gaspar Monge en el siglo XVII, actualmente se constituye en la base de la comprensión de los principios utilizados en la representación bi y tridimensional, que se fundamenta en los sistemas de proyección, los métodos plantados por Monge no han cambiado sustancialmente, sin embargo las computadoras han utilizado los principios de la Geometría descriptiva para crear sólidos, y representaciones de elementos y figuras geométricas en espacios digitales.

Es Ivan Stherland un estudiante Graduado del MIT, el cual en su tesis doctoral, plantea las bases que sirvieron para desarrollar las gráficas interactivas por computador que evolucionaron hasta convertirse en CAD (programas de dibujo y Diseño Asistido por Computador), la cual en la actualidad se han convertido en herramientas de diseño y modelado, estos modelos tridimensionales de representación son referenciados con respecto a las coordenadas X, Y, Z.

Aunque existen diversas clases de modelado, solo se menciona el modelado en trama de alambre que sería el más cercano al que se produce en Cabri, en este sistema se representa la información Geométrica en relación con coordenadas bidimensionales del objeto (XZ, XY, y YZ) es una técnica eficiente, pues permite la visualización comprensiva, semejando las cualidades y características del objeto geométrico.

PROCESO DE MODELACIÓN GEOMÉTRICA DE UN DODECAEDRO:

FIGURA 1: Dibujar la estructura base del sistema de proyección bidimensional (ubicada sobre la recta R1): Representar dos de sus proyecciones ortogonales de vistas múltiples, vista superior (también llamada horizontal) y vista frontal (también llamada vertical); adicionalmente se dibuja la estructura de representación tridimensional (proyección axonométrica isométrica), y se construye el segmento unidad BC, este permite manejar la escala del dibujo.

Proyecciones ortogonales (*figura* número 1, parte izquierda**):** Uo (línea de referencia), el puntos Wo representa al eje de altura (visto como punto en la superior) el punto Vo representa el eje V (profundidad), visto como un punto en la frontal; la recta U´o representa el plano horizontal de referencia, visto de filo en la frontal.
Proyección Isométrica: se dibujan tres ejes isométricos:

Eje isométrico U: Representa el ancho.
Eje isométrico V: Representa la profundidad.
Eje isométrico W: Representa la altura.
Punto O: Origen coordenado.

Construir los tres ejes isométricos, de tal forma que el eje U, establezca un ángulo de 150° grados con la horizontal, el eje W, forme un ángulo de 30°, y el eje W forme un ángulo 90°.

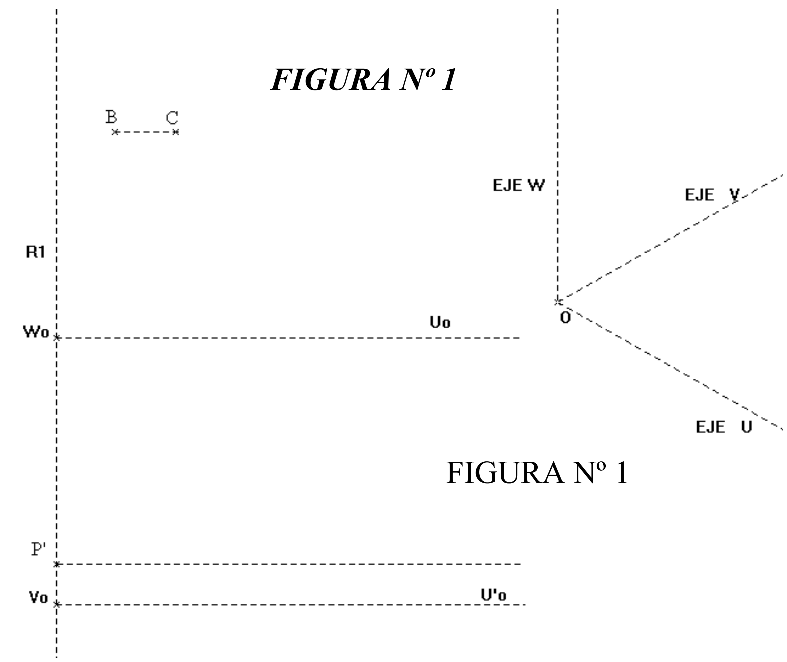
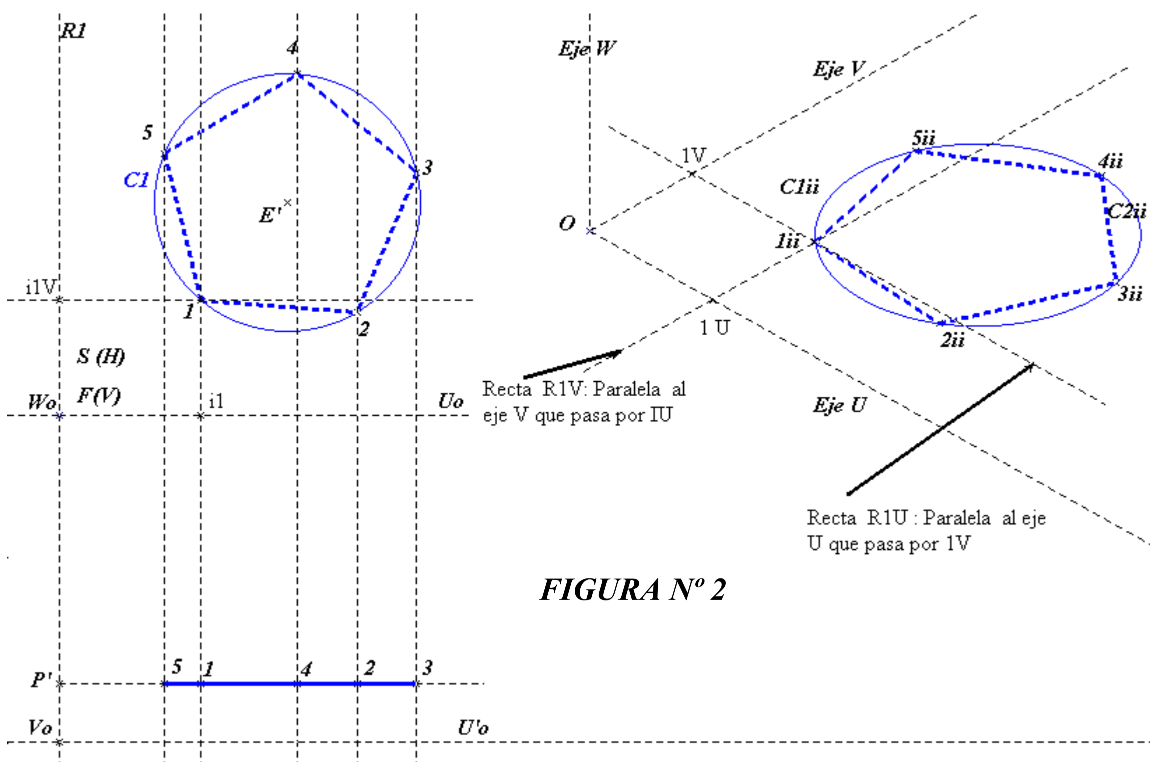


FIGURA Nº 1

Figura 2. Construcción de la vista superior, frontal y el dibujo isométrico inferior de un pentágono regular (1,2,3,4,5) que gira, (éste pentágono representa la base del dodecaedro).



2.1. Se construye la circunferencia C1 de radio BC, el pentágono se dibuja con base en el punto 1 (punto sobre objeto), para que pueda girar toda las construcción.
2.2. Para la construcción del isométrico, se traslada con compás las medidas de la vista superior sobre los ejes isométricos correspondientes así:
2.2.1.Trasladar con compás la distancia ortogonal Wo-i1, sobre el eje U de la isométrica, marcar la intersección con el Eje U, como 1U.
2.2.2.Paralela R1V: trazar la paralela al eje V que pasa por 1U.
2.2.3.Trasladar con compás la distancia ortogonal Wo-i1V , sobre el eje V de la isométrica, marcar la intersección con el Eje U como 1V.
2.2.4.Paralela R1U: trazar la paralela al eje U que pasa por 1V.
2.2.5.Marcar la intersección entre las dos paralelas como 1ii.
2.2.6.Realizar la misma operación con todos los puntos del pentágono, o en su defecto genera una macro-construcción que agilice la operación.

FIGURA 3. Construcción del pentágono regular superior del dodecaedro
3.1.Construcción de la vista superior e isométrica (inferior) del pentágono regular (6,7,8,9,10), éste representa la tapa superior del poliedro.

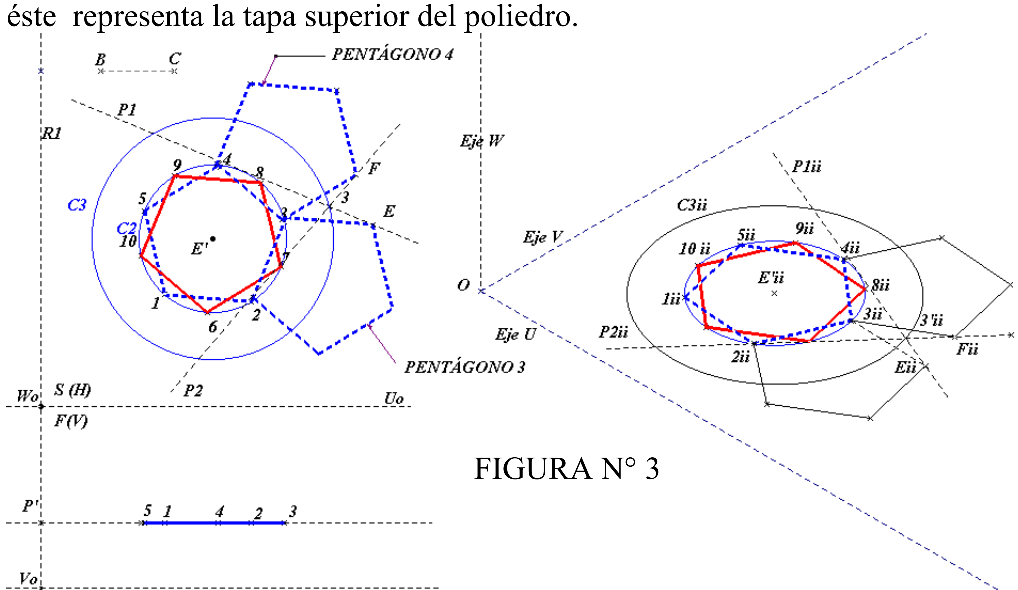


FIGURA N° 3

3.1.Dibujar los pentágonos 3 y 4 , son reflexiones axiales del pentágono inicial (1,2,3,4,5).
3.2. Rectas P1 es la perpendicular al lado 3-2 que pasa por el vértice F, la Recta P2 es la perpendicular al lado 3-4 que pasa por el vértice E .
3.3. El punto 3 constituye la base del circulo que contiene el decágono regular :El punto 3' es la intersección entre las dos perpendiculares P1 y P2.
3.4.Circunferencia C3: de centro en E' y radio E'-3', representa la circunferencia donde se inscribe decágono regular.

FIGURA 4. Construcción del decágono inscrito en la circunferencia C3: 4.1. Construir un decágono regular con centro en E' y radio E'-3', construir la vista superior e isométrica, del conjunto de pentágonos, que constituyen la vista superior e isométrica del dodecaedro; uniendo los vértices que correspondan, como se muestra en la figura.
4.2. Determinar por construcción de la altura H1 del dodecaedro de la siguiente manera:
4.2.1. Punto M2: Punto medio del lado 2-3, trazar la perpendicular P6 al segmento 7-7' que pase por el punto 7'.

4.2.2.Circunferencia C5: con centro en el punto M2 y radio M2-5.

4.2.3.Punto S: Trazar la intersección entre la recta P6 y la circunferencia C5.
4.2.4.Trazar el segmento H1 el cual es la altura mayor del poliedro.

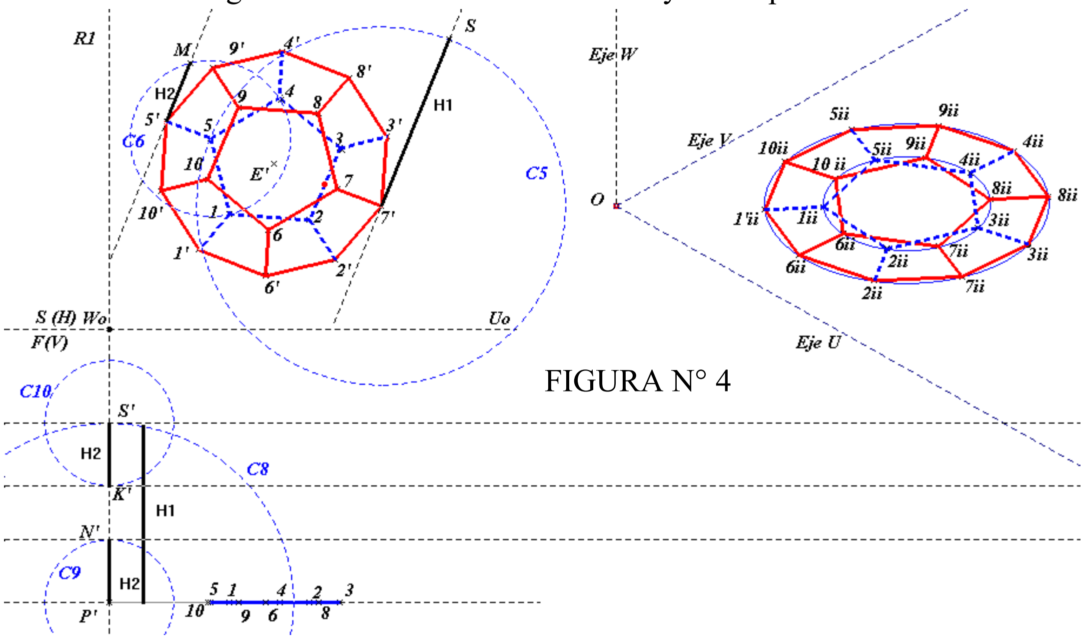


FIGURA N° 4

4.3. Hallar Altura H2 del dodecaedro de la siguiente manera:
4.3.1. Trazar una perpendicular P6 al segmento 5-5' que pase por el punto 5'.
4.3.2. Circunferencia C5: trazar la circunferencia C5 con centro en el punto 5 y radio 5-4.
4.3.3. Punto M: Trazar la intersección entre la recta P6 y la circunferencia C6.
4.2.4.Trazar el segmento H2: desde el punto 5' al punto M trazar el segmento H2 el cual es la menor altura del poliedro. Trasladar las alturas a la frontal como se muestra en la figura.

FIGURA 5: Construcción de los puntos del dodecaedro en la vista Frontal:

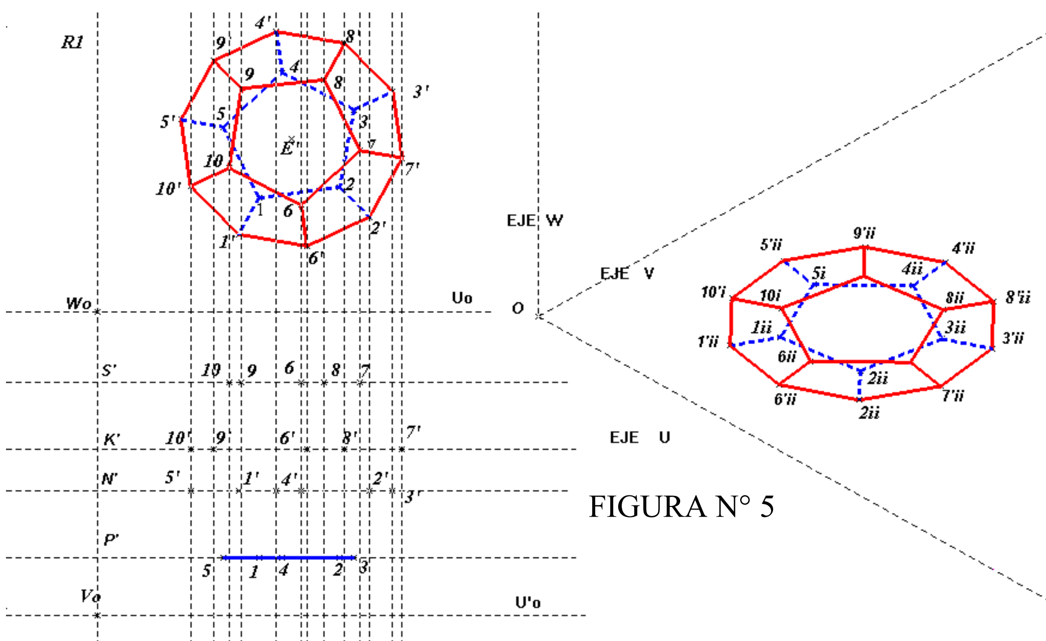


FIGURA N° 5

5.1. Construcción de las proyectantes (verticales): Trazar las perpendiculares a Uo, por cada uno de los puntos de la vista superior.
5.2 Marcar las intersecciones correspondientes entre las líneas horizontales en la vista frontal, (alturas del poliedro) que pasan por los puntos S’, K’, N’, P’ y las proyectantes (verticales) ; etiquetar los puntos.

FIGURA 6: Construir el dibujo del poliedro abierto inferior, trazar la vista correspondiente en la frontal y en la isométrica (para trasladar las alturas se construyen vectores den la frontal y se trasladan los puntos del isométrico inferior según los vectores). Ejemplo para construir el punto 2 del isométrico: Dibujar un vector desde Vo en dirección a P’ en la frontal; con la herramienta Traslación, trasladar el punto 2ii según el vector Vo-P’. Realizar la misma operación con cada uno de los puntos del dodecaedro; construir en cada caso los vectores apropiados para trasladar los puntos.

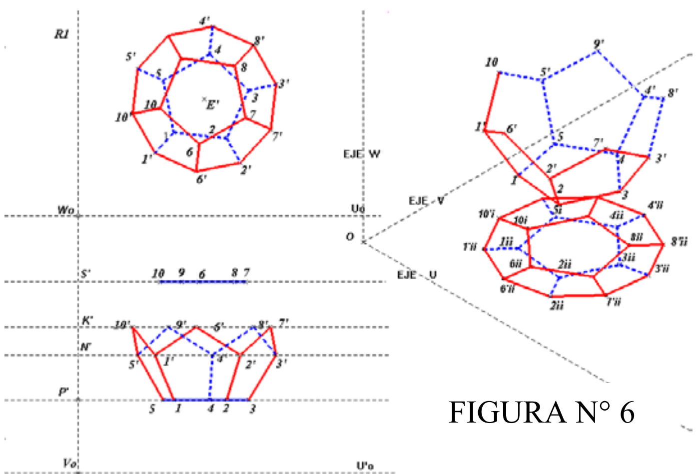


FIGURA N° 6

FIGURA 7: Construir el poliedro superior, en la vista frontal y su correspondiente en el dibujo isométrica, girar manualmente el punto 1 en la vista superior o animarlo, el dodecaedro girará alrededor de un eje paralelo W, que pasa por su centro .

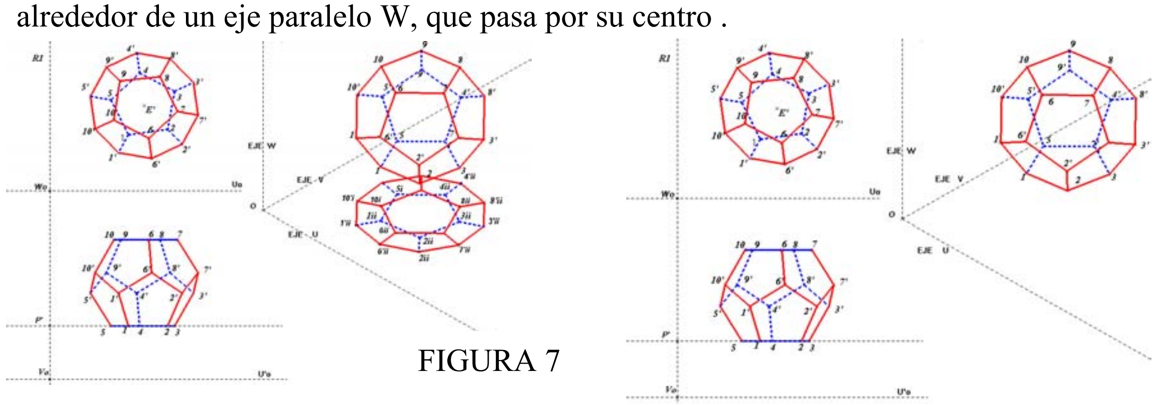
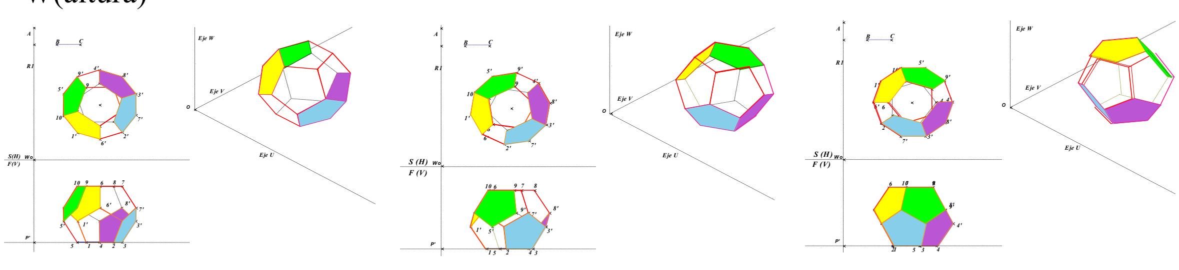


FIGURA 7

ROTACIONES: Las rotaciones se efectúan respecto al eje vertical, para este caso el eje W(altura)



CONCLUSIONES:

> "desde una Educación controlada por el profesor y donde el estudiante es tan solo un espectador nos dirigimos hacia esquemas donde el proceso educativo pertenece al alumno, quien se convierte en el responsable y conductor de su aprendizaje se nos presentan nuevas alternativas que nos obligan a un replanteamiento de nuestros conceptos pedagógicos, ante la oportunidad de incorporar nuevas tecnologías que le otorgan interactividad y mayores estímulos al proceso de enseñanza y aprendizaje"[4]

Una de las ventajas fundamentales del uso de Cabri es la de permitir encontrar los principios que caracterizan a un conjunto de elementos geométricos, haciendo de estos un "Familia de objetos", como es el caso de las "axonometrías"; y aunque por ser el dodecaedro una figura de naturaleza regular, no permite una observación tan clara de los cambios que se pueden apreciar en otros tipos de figuras no regulares en las cuales la variación de uno de sus componentes genera una familia de objetos, por ejemplo partiendo de un dibujo isométrico, se puede construir, la caballera, la militar, la gabinete, la dimétrica y la trimétrica sin tener que volver a construir de nuevo el objeto, esto realmente es uno de los grandes aportes que por ahora se pude entrever claramente, con el uso de Cabri II; Permitiéndole al estudiante comprender la esencia del conjunto de objetos que forman los sistemas de proyección.

Las variaciones necesarias para llegar por ejemplo de una representación isométrica a una representación caballera o gabinete, se basan en la aplicación de trasformaciones geométricas y en el estudio de sus invariantes; esto abre por tanto un inmenso panorama, para el estudio de la geometría.

También se aplican los conceptos de trasformaciones cuando se construyen teselados, con Cabri lo cuál permite al estudiante generar estructuras de pensamiento geométrico donde se entrena en los procedimientos para detectar patrones. de gran utilidad en los procesos creativos relacionados con diseño.

Las ventajas del uso de Cabri II, en el aula de clase específicamente hablando de la enseñanza de la Geometría Descriptiva, permite generar una mayor precisión, en el desarrollo de problemas con respecto a los elaborados a mano.

Facilidad de visualización: En el caso específico de Cabri la visualización es muy diferente a los modeladores CAD; porque permite el control por parte del usuario, el sólido gira simultáneamente en todas las vistas a voluntad, (ya sea manualmente o por animación), lo cual permite generar visualizaciones múltiples en movimiento, mientras que la imagen en un modelador CAD es estática.

Comprobación de conceptos a partir del cambio de posición de objetos: Se pueden generar cambios dinámicos de un objeto con respecto a otro, mientras uno de los objetos geométricos permanece estático el otro objeto puede moverse con diversos grados de libertad, lo cual

[4] Conferencia de la telecapacitación. Calidad y masificación de aprendizaje. Abstract. Proyecto Telecom. Ponencia sobre conocimiento Global 97. Bogotá, junio 23 de 1997.

permite visualizar los comportamientos de los objetos entre sí, permitiendo el análisis de las relaciones entre los diversos objetos geométricos.

La capacidad de Cabri de ofrecer gráficas en movimiento como las animaciones, permite establecer las relaciones entre objetos, así como su posición espacial.

Como apoyo a los procesos de enseñanza del docente, el cual utiliza el material en el aula de clase, para exponer conceptos, o para que el estudiante repase o comprenda ejercicios ya elaborados, debido a la opción de "Revisar construcción".

El uso de Cabri géometre genera motivación y expectativas en los estudiantes, debido al planteamiento de retos en los procesos de resolución de problemas.

Como desventaja cabe anotar que al comienzo del aprendizaje debido a la gran cantidad de conceptos, involucrados en el uso de las herramientas, los estudiantes, manifiestan dificultades en aprenderlo; pero una vez superada esta fase inicial, les gusta por la capacidad lúdica que se genera prácticamente, de manera natural.

Todas estas posibilidades permiten la potencialización de la comprensión espacial debido al movimiento, contrario a las percepciones estáticas del espacio reproducidas en papel.

Tendría que estudiarse a fondo los conceptos de isometrías aplicados a la Geometría Descriptiva, el conocimiento y aplicación de las rotaciones, traslaciones, simetrías axiales y simetrías centrales con sus correspondientes grupos, así como el estudio de las invariantes geométricas en Cabri, es un gran tema de estudio que esta por construirse e investigarse, y que aportaría un nuevo norte a la enseñanza aprendizaje de la Geometría Descriptiva.

Es necesario aclarar que la enseñanza de la Geometría Descriptiva debe integrar, múltiples técnicas de comprensión espacial, además de la proporcionada por un entono asistido por computador; el aprendizaje real debe poder ser expresado en múltiples medios, desde el papel, la maqueta o el entorno computarizado; sin embargo las facilidades que ofrece el espacio digital es sin lugar a dudas un espacio motivante y enriquecedor para lograr objetivos académicos.

Bibliografía

•BERTOLINE, Gary. Dibujo en Ingeniería y Comunicación Gráfica. 2º edición. Editorial Mc Graw Hill. México, 2000
•MINOR C., Hawk. Geometría Descriptiva. Mc Graw Hill. México, 1995
WELLMAN, Leighton. Geometría Descriptiva. 2º edición. Editorial Mc Graw Hill. México, 1998•YURKSAS, Bronislao. Dibujo Geométrico y de Proyección. 1998
•FERRER, Muñoz José Luis. Superficies poliédricas. Editorial Paraninfo.1999.

La rigidez geométrica como obstáculo para el desarrollo del Razonamiento Geométrico en un ambiente Cabri

Víctor Larios Osorio (*vil@uaq.mx*)

Universidad Autónoma de Querétaro, Fac. de Ingeniería

Nivel: Secundaria.

Eje temático: Experiencias educativas alrededor del uso de Cabri en la clase.

RESUMEN: Cabri-Géomètre proporciona un ambiente que ofrece la posibilidad de desarrollar el razonamiento geométrico a alumnos proveyéndoles de herramientas que les permitan aprender a construir demostraciones geométricas y, de manera más general, aprender Geometría. Sin embargo, durante el uso del software pueden manifestarse conductas por parte de los estudiantes que representan un desafío para los profesores que asumen el reto de utilizarlo. En este trabajo se reportan los avances de una investigación dirigida al estudio de la construcción de la demostración geométrica en un ambiente con Cabri con alumnos de secundaria, y se incluyen observaciones realizadas en cuanto a la preferencia de los estudiantes por hacer (y manejar) construcciones geométricas con formas "estándar" e ignorando las potencialidades dinámicas que proporciona la función de arrastre del software.

En el último par de años he estado realizando un proyecto de investigación dirigido al estudio de los argumentos que producen alumnos de secundaria durante la construcción de la demostración geométrica en un ambiente de Geometría Dinámica utilizando el programa Cabri-Géomètre. El interés surgió más que nada porque a pesar de que este programa ofrece la oportunidad de estudiar la Geometría por medio de la investigación y la experimentación, también introduce nuevos retos en el ambiente escolar que tienen que ser estudiados e investigados.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El rasgo principal del software para Geometría Dinámica (SGD), incluyendo Cabri-Géomètre, es la posibilidad de mover los elementos de las construcciones por medio del *arrastre*. La aprehensión de la potencialidad de esta operación, que puede ayudar a diferenciar entre *figura* y *dibujo* (o *diagrama*) (Laborde y Capponi, 1994:168), parece que no es necesariamente automática, pero sí puede afectar la percepción de las construcciones geométricas realizadas en la pantalla, así como la convicción sobre su grado de generalidad. Además, existen fenómenos relacionados con una rigidez en la percepción y en el manejo mental de las figuras geométricas, lo cual ha llevado a interesarnos en observar los problemas que surgen al manifestarse éstos últimos al utilizar instrumentos de SGD.

MARCO TEÓRICO

Antes que nada, es importante señalar que con el término *rigidez geométrica* (utilizado desde el título del texto) me refiero a la incapacidad del individuo para manejar mentalmente una figura geométrica cuando ésta no se encuentra ciertas posiciones "estándares" o no pueden imaginar la figura cuando se mueve (bajo una traslación) o cuando cambia su forma (cuando sus lados cambian de posición o sus ángulos se modifican, por ejemplo).

En otras palabras, existe la incapacidad de los estudiantes para imaginar el posible movimiento de las figuras o partes de las construcciones (precisamente uno de los principales rasgos del SGD) que la transformaría en otra construcción, o para explorar mentalmente otras posibilidades de construcción. Esta incapacidad se refleja, por ejemplo, en las preferencias por utilizar figuras con una cierta orientación "estándar".

Además, Maracci (2001:335-336) menciona que cuando los estudiantes dibujan figuras, intentan armonizar los aspectos conceptuales y figurales,[1] lo que los lleva a realizar un esfuerzo para construir un dibujo *satisfactorio* con estas características:

- "un dibujo debería representar correctamente la situación geométrica en consideración, la interpretación de los estudiantes de la situación dada y del dibujo producido debería ser consistente;
- "un dibujo debería ser reconocido como suficientemente genérico;
- "un dibujo debería poseer una buena gestalt, debería satisfacer las leyes fundamentales que controlan los procesos básicos de percepción".

Posiblemente las preferencias de los estudiantes se debe a una necesidad de construir dibujos satisfactorios, que los convenzan, lo cual resulta en una cierta figura con una orientación específica (que incluso coincida con las figuras de fuentes "autoritarias" como son los libros de texto y las clases de Geometría).

METODOLOGÍA

En el experimento realizado participaron 38 alumnos de 13 y 14 años de edad organizados en equipos de uno o dos participantes a fin de que cada uno de éstos utilizaran una de un total de 20 computadoras personales. El trabajo fue realizado en diez sesiones de

[1] Desde el punto de vista de Fischbein (1993), las figuras geométricas son conceptos figurales que pueden ser manejados tanto como objetos, como conceptos.

50 minutos cada una, con la presencia del investigador y de la profesora del grupo cuyos papeles principales fue proporcionarles las hojas de trabajo que tenían que llenar en equipo y ayudarles en caso de dificultades en el uso del software. Las hojas de trabajo les eran proporcionadas al inicio de las sesiones y se les recogían al finalizar éstas; en el caso de que algún equipo no terminara de llenar alguna de las hojas de trabajo se les regresaba la siguiente sesión.

Estas hojas de trabajo correspondieron a nueve actividades (mencionadas más abajo) diseñadas con contenido geométrico relacionado con, primero, triángulos y sus *triángulos de los puntos medios* (obtenidos uniendo con segmentos los puntos medios de los lados del triángulo original) y, después, cuadriláteros y sus *cuadriláteros de los puntos medios* (obtenidos de manera similar).

Las actividades de los triángulos fueron:

- *T1.* Construcción de un triángulo y de su *triángulo de los puntos medios*, así como la observación del paralelismo entre los lados de ambos triángulos.
- *T2.* Construcción de un triángulo y su *triángulo de los puntos medios* a partir de las propiedades de paralelismo entre los lados del triángulo (la situación recíproca a la de la actividad anterior).
- *T3.* Propuesta de una procedimiento para construir el triángulo original a partir de su *triángulo de los puntos medios*.
- *T4.* Aplicación del procedimiento de la actividad anterior, así como su verificación y su justificación. En esta actividad es necesario tomar en cuenta las condiciones iniciales observadas en las actividades anteriores.

Las actividades de los cuadriláteros fueron:

- *C1.* Construcción de un cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios*, así como la observación de las relaciones y propiedades.
- *C2.* Exploración de las relaciones entre las diagonales del cuadrilátero y de su *cuadrilátero de los puntos medios* a fin de justificar el paralelismo entre los lados de éste último.
- *C3.* Observación del caso de un cuadrilátero cóncavo y justificación de la propiedad de paralelismo de los lados de su *cuadrilátero de los puntos medios*.

C4. Propuesta de un procedimiento para construir un cuadrilátero a partir de su *cuadrilátero de los puntos medios*. Nuevamente los estudiantes deben considerar como condiciones iniciales las propiedades observadas previamente.

Todas estas actividades se relacionaron como sigue:

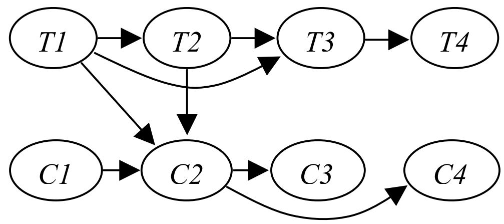


Fig. 1.

Primero las actividades permitieron a los estudiantes explorar construcciones de los triángulos y los cuadriláteros a fin de proponer algunas observaciones; posteriormente tuvieron que justificar las observaciones o explicarlas. Este proceso fue realizado varias veces, tanto dentro de las actividades como entre ellas.

RESULTADOS CON RESPECTO A LA *RIGIDEZ GEOMÉTRICA*

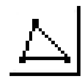
Como se dijo antes, cuando se usa el término *rigidez geométrica*, no nos referimos a la capacidad o falta de esta por parte de los estudiantes para identificar una figura, sino a la "comodidad" de los estudiantes por manejar figuras con una cierta orientación o forma. Durante las actividades con triángulos, por ejemplo, se notó la tendencia de utilizar triángulos isósceles (e incluso casi equiláteros), evitando el uso de escalenos u obtusos, a pesar de que en varias ocasiones a diversos equipos les fue deformada la construcción por parte del investigador y la profesora. Por ejemplo, el equipo identificado por 14-18 (los números de lista de sus integrantes) en la actividad *T3* contestó a la siguiente pregunta:

3.b) El triángulo chico (con el que van a empezar), ¿necesita tener alguna propiedad especial? si que sus 3 lados son iguales

Lo cual, además de la aparente búsqueda de construcciones convincentes y armoniosas (en el sentido de Maracci) quedó más en evidencia en la siguiente respuesta:

4. Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: En hacer 3 triangulos de la misma medida en cada lado del primer triangulo

Por otro lado, se observó que la operación de *arrastre* no necesariamente es utilizada como medio de validación de la construcción, sino como una herramienta para "acomodar a ojo" construcciones que carecen de dinamicidad y que son diagramas estáticos. Es decir, los alumnos que mostraron esta conducta no sólo parecían no poder manipular las figuras mentalmente, sino tampoco en la pantalla de la computadora. Por ejemplo, el equipo 10-41 en la actividad *T3* apuntó:

> **4.** Escriban el procedimiento en el que pensaron para construir el triángulo grande: ponerle en la opción de punto y poner tres puntos, unirlos con segmentos y queda el triangulo chicho, despues ponerle en la opcion  y mover el mouse hasta que sus lineas pasen por los puntos del chico

Finalmente, se observó el fenómeno que he llamado *arrastre discreto* o *paso a paso*, el cual consiste en considerar sólo dos casos durante el arrastre: la construcción que se hizo antes de la operación de arrastre y la última que se obtiene cuando se detiene el arrastre, pues los momentos intermedios del movimiento no son percibidos como casos posibles de la construcción, sino sólo diagramas intermedios que no tienen el mismo status como construcción geométrica que el primer y el último pasos. El siguiente diálogo entre la profesora y un alumno ilustra esta situación:

Profra: (Después de arrastrar un vértice varias veces) "¿Ves todos los triángulos que se forman?"

Alumno: "Sólo se forman dos."

La respuesta del alumno se refiere al primer y al último triángulos. Este tipo de comentarios fue acompañado con actitudes de indeferencia hacia los casos intermedios.

COMENTARIOS FINALES

A pesar de que los estudiantes parecen conocer el concepto de triángulo y expresarlo sin hacer referencia a aspectos relacionados con la orientación, cuando manejan las figuras aparece el hecho de que la interpretación de una figura depende principalmente de sus limitantes figurales, lo cual quiere decir –en palabras de Fischbein (1993:155)– que "la tendencia a abandonar la definición bajo la presión de limitantes figurales, representa un grave obstáculo en el razonamiento geométrico". Esta situación implica algunos obstáculos cuando se usa un software que tiene una correspondencia lógica con la Geometría como es Cabri-Géomètre. Además, este fenómeno parece llevar a que los estudiantes no sean capaces de apreciar las rasgos del software dinámico, porque "para apreciar esta información visual [la proporcionada por el software], es crucial que ellos [los estudiantes] superen los obstáculos asociados con los diagramas" (Yerushalmy y Chazan, 1993:31)

Fenómenos como el del *arrastre discreto* nos muestran que la aprehensión del rasgo dinámico del software no es automática y sí, en cambio, requiere de un desarrollo cognitivo, existiendo la posibilidad de los alumnos desechen operaciones basadas en este rasgo, como es el *arrastre* como un medio de validación de que tan correcta es (Mariotti, 2000) y sólo lo usen para "acomodar" el dibujo.

Es necesario tomar este fenómeno en cuenta y estar preparado a fin de evitar los fracasos (los cuales podrían ocurrir incluso antes de comenzar a utilizar el software). El proceso que hace capaces a los estudiantes para capturar la potencialidad del rasgo dinámico de un SGD no es automático, sino que necesita desarrollo cognitivo. Aun cuando el software podría ayudar a eliminar la *rigidez geométrica* debido a sus características, también es posible que algunos profesores (y algunos estudiantes) se desanimen para usarlo si no se dan cuenta de este obstáculo.

BIBLIOGRAFÍA

Fischbein, E. (1993). "The theory of figural concepts". *Educational Studies in Mathematics*, 24:139-162.

Laborde, C.; Capponi, B. (1994). "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1-2):165-210.

Maracci, M. (2001). "The formulation of a conjecture: the role of drawings". En **Heuvel-Panhuizen** (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 335-342). Holanda: Utrecht Univ.

Mariotti, M. A. (2000). "Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment". *Educational Studies in Mathematics*, 44:25-53.

Yerushalmy, M.; Chazan, D. (1993). "Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer". En **Schwartz, Yerushlamy y Wilson** (eds.), *The Geometric Supposer. What is it a case of?* (pp. 26-56). E.E.U.U.: Lawrence Erlbaum Associates,

Talleres para Estudiantes

Pasos para proyectar el plano a una esfera

Roberto Gómez Morín
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas UA de C

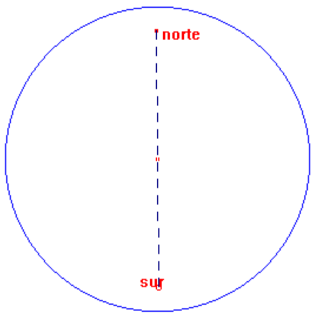
1. Construya un círculo con centro en un punto llamado “c”.
2. Coloque un punto dentro del círculo y llámelo “Norte”.
3. Use la macro “ecuador”.
4. Coloque un punto arbitrario en el ecuador y llámelo “r”.
5. Use la macro “ejes”.
6. Aparezca los ejes de predeterminados de cabri.
7. Coloque un punto en estos ejes, llámelo “x”.
8. Utilice la macro “eje a eje”.
9. Use la macro “meridia”.
10. Use la macro “punto esférico”.
11. Pruebe curvas y observe su lugar geométrico.
12. Si desea otro punto repita del 7 al 11.

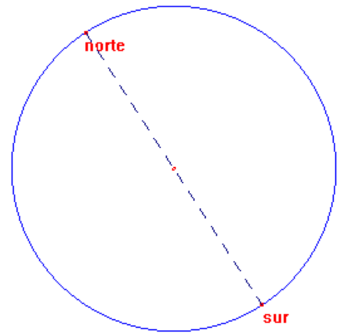
Nota: Las instrucciones de cada macro vienen consigo.

Macro Ecuador

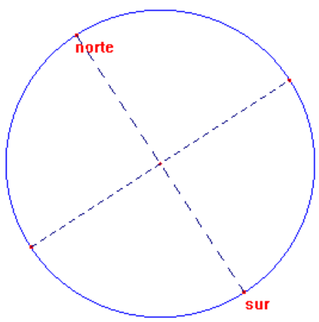
Grafica en cabri

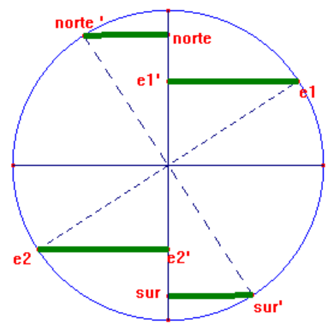
Pero girando 90°



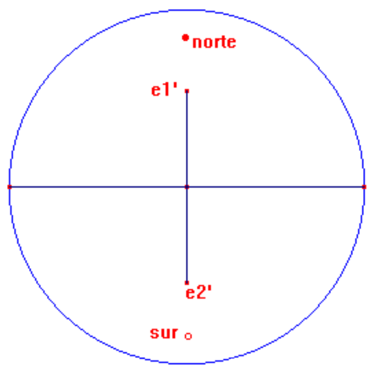


En lo que ahora si podremos saber como ser el ecuador

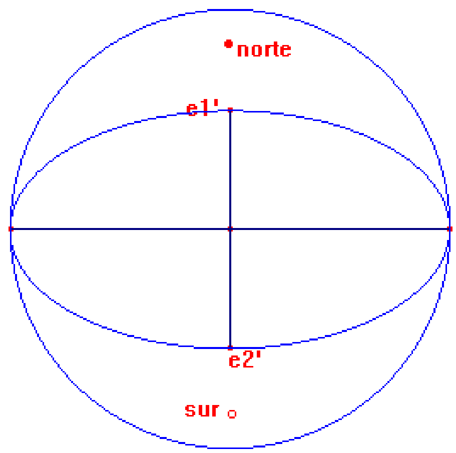




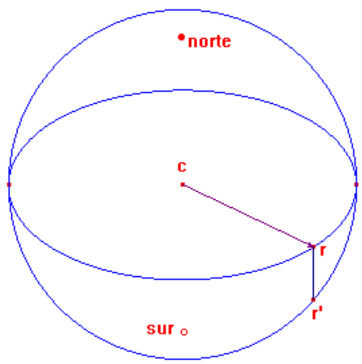
Sabemos que todo lo que este en el círculo girando 90° quedara un mismo meridiano que aparentara ser una recta. Lo cual el norte asi como e2 estará de frente y por la parte trasera sur y e1.



Y trazaremos otros dos puntos que serán la intersección de la mediatriz de norte-sur con la esfera estos serán el eje mayor y el segmento e1'-e2' serán el eje menor, ahora si se puede trazar a partir de estos puntos el ecuador

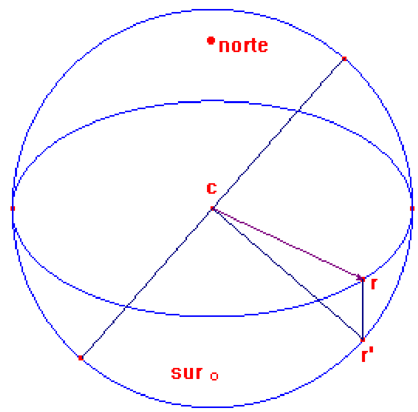


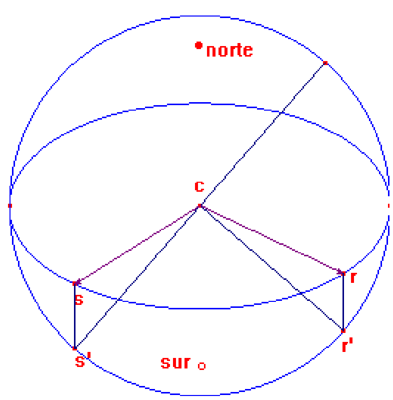
Macro ejes



Se traza un vector origen “c” y final, “r”, y se proyecta a la esfera, con la finalidad de encontrar un punto ortogonal

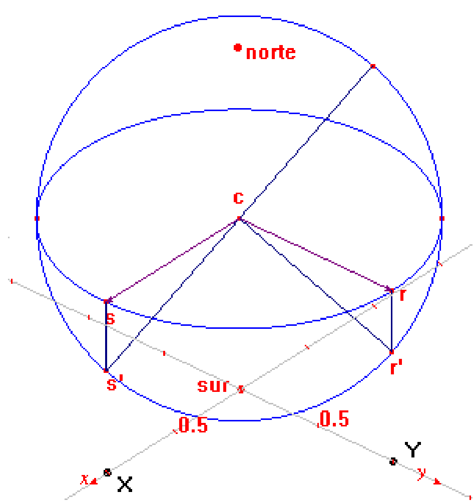
Se traza un segmento “r’-c” y se calcula las intersecciones de la perpendicular al segmento “r’-c” que pasa por “c”



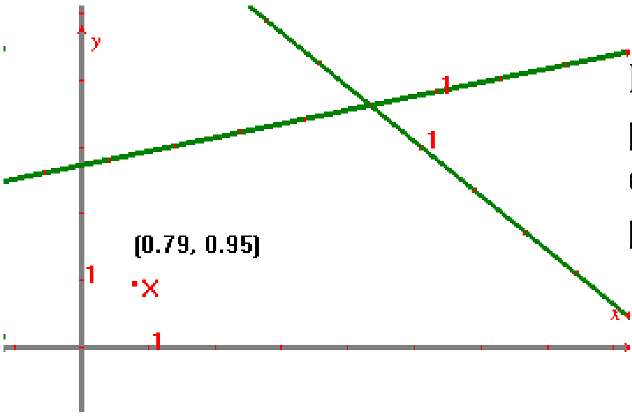


Tome la intersección mas cercana girando hacia las manecillas del reloj y llámelo “ s’ ”, inmediatamente, proyéctelo al ecuador, llámelo S
Trace el vector origen “c” fin “S”.

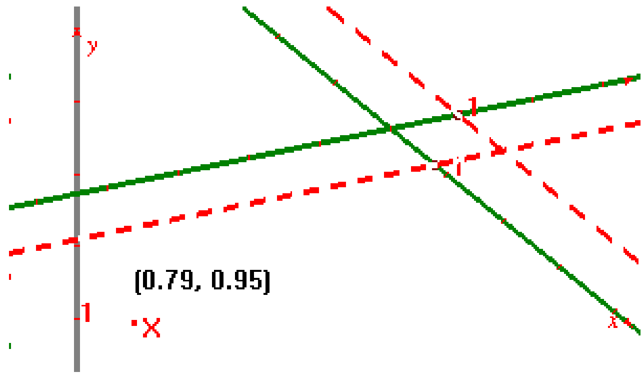
Traslade el punto sur según el vector “ s-c ”, y llámelo X, asi mismo con el vector “ c-r ” , llámelo Y.
Con el comando nuevos ejes de clic en “sur”, “X” é “Y”.



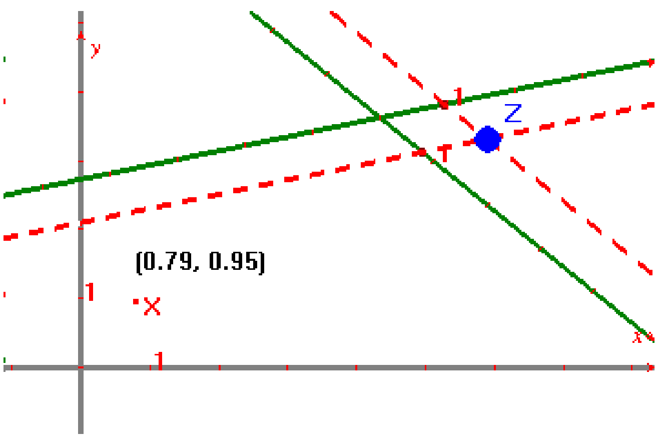
Macro eje a eje



Dado el punto en coordenadas en los ejes predeterminados, pregunte las coordenadas del punto en el eje predeterminado

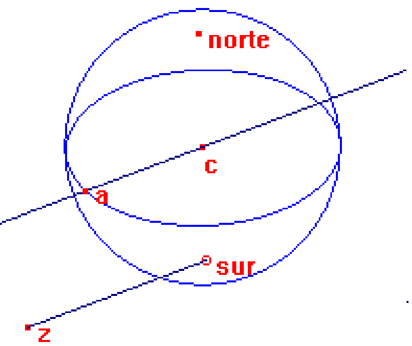


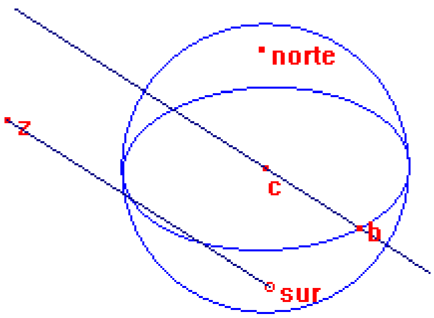
Traslade las coordenadas del eje predeterminado al nuevo eje. Tomando en cuenta que el X al nuevo X, Y al nuevo Y. Trace paralelas a los ejes que pase por los puntos trasladados



El punto de intersección de las paralelas será el punto trasladado al eje, el cual se le llamara *Z*

Macro meridia



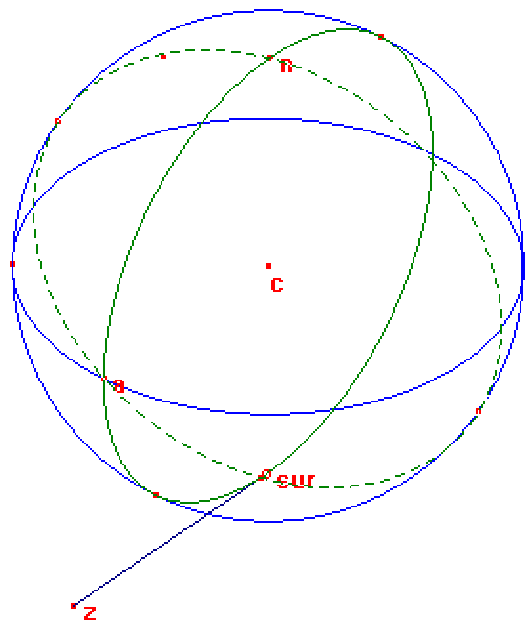


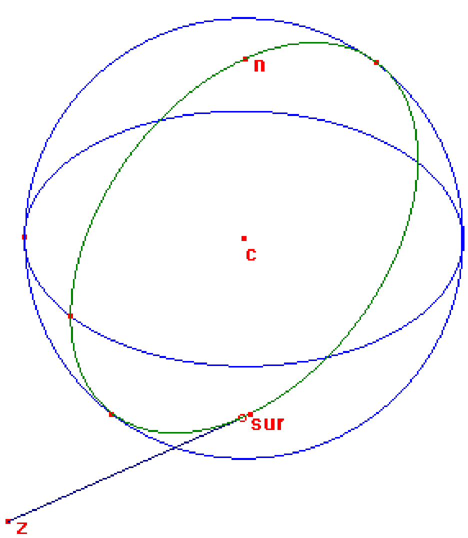
A partir de un punto Z en el plano de la esfera, trace un segmento sur-Z, trace la paralela a este segmento, que pase por el punto C. Y tome la intersección con el ecuador y el que en apariencia sea el frente como se muestra

A partir de estos puntos se podrá hacer una elipse única, que tiene que las siguientes características:

1.- Que al hacer el recorrido norte hasta A, no tenga necesariamente que rozar al borde de la circunferencia.

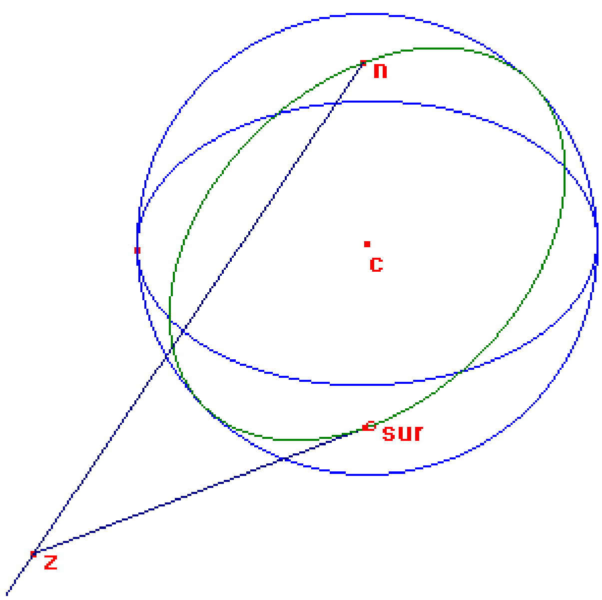
2.- Que sea el radio de la circunferencia sea igual al semieje mayor de la elipse.





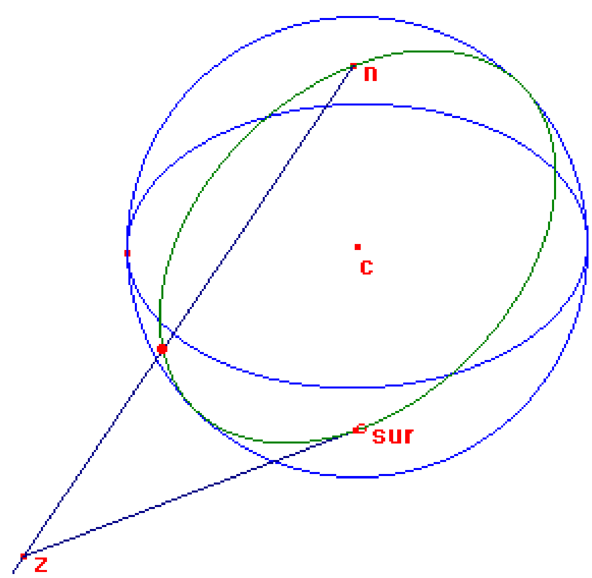
Esta elipse será el producto final de esta macro

Macro punto esférico



Dados el punto *Z*, que esta en los ejes de la esfera, su meridiano, norte y la esfera. Se trazará una semirrecta del norte hacia el punto *Z*.

Se encuentra la intersección de la semirrecta y el meridiano. Este será el producto de la macro y se le llamará punto esférico



Los aztecas, primeros astronautas

Jarabe Tapatío

Bailes de Veracruz y Durango

Colombia, Cuba, Francia, México

Cena cortesía de Jean-Marie Laborde

Cena para dos

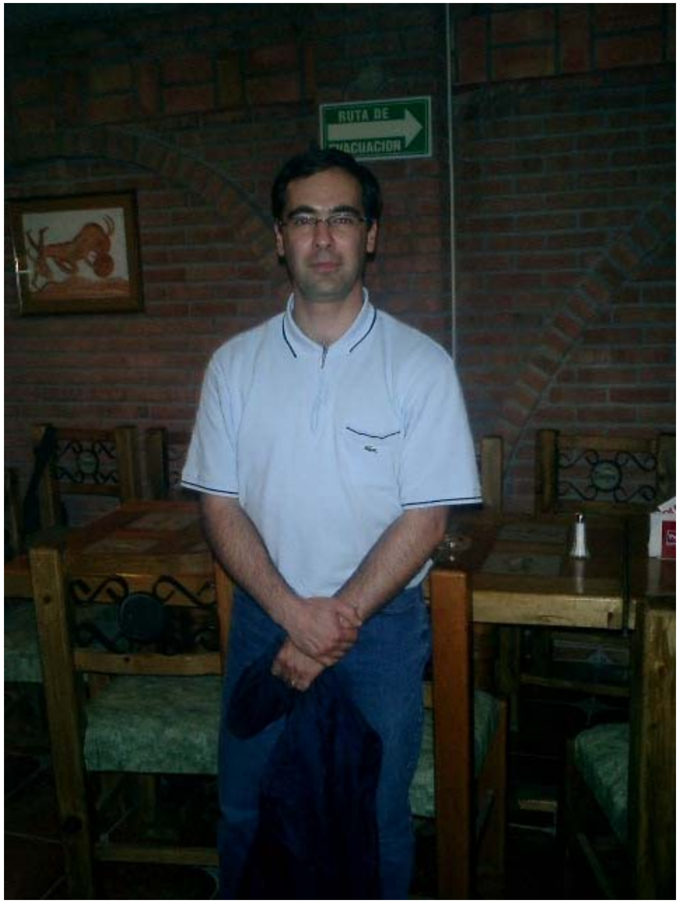
Ojo: Se va sin pagar!

La cuenta?...
Y yo porqué?

Ni modo, habrá que dejar la cámara ...

No se apuren, ya está pagado ...

Alexandre, Federica, Alicia



Grupo XVIII y mas ...

Marco, Soto, Roberto, Chuy

Robert, Roberto, Federica

Plenaria Federica Olivero

Plenaria Eugenio Díaz Barriga



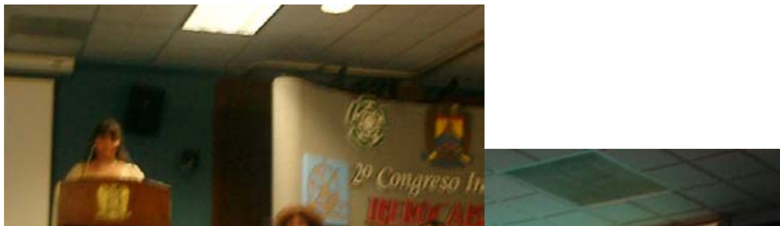






Plenaria Colette

Plenarias




2o. Congreso Internacional
IBEROCABRI 2004
BIENVENIDOS !!!


FRAMEWORK

Colette, Haydée, Julio, Mayra

Lucho, Sebastian, Mabel, Alexandre, Sonia

Índice de autores

Índice alfabético de autores